授業のエッセンス

基礎から実戦までの流れ ／ 三角関数

理論で攻略する化学反応 ／ 電気分解

物理公式の使いどころ ／ 摩擦力

東大　京大　早慶　東工大　一橋大　国立医学部他

大学受験　多摩理数科教室

東京都府中市片町２－ ２４－ ２　レジデンスＨ＆Ｋ１０２号室

TEL：０５０－ ３７３６－ ８７４９

http://www.tamajyuku.com/

数学における基礎と入試問題のギャップ

☆入試への道はすでに始まっている☆

xy 平面において点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き, 点 B は x 軸上の $x > 0$ なる部分を動く. ただし, 線分 AB の長さは 1 であり, 線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする. OB の中点を M とし, ∠AOB$=\theta$ とするとき, 線分 CM の長さを θ で表し, 線分の長さの範囲を求めよ.

これは過去に東大で出題された問題である. 「こんな問題が解けるようになるのは, いつのことか」と漠然と考えている諸君も多いだろうが, 実はこの問題, 今の諸君の知っている知識で, 解ける範囲の問題である. つまり, 「今すぐに, それも 20 分程度で」解けるようでなければならない. この問題を例にとって, 諸君が数学において「これからどのように勉強していけばよいか」を探ってみたい.

著名な参考書や予備校の先生にしたがって学習を進めていけば, 入試用の基本的なテクニックを知ることができる. しかし本物の入試問題に当ったとき, 少なくとも字面は参考書の問題と異なるわけだから, 自分の知っているテクニックをいかに駆使していけるかがポイントになってくる. 自由自在にテクニックを駆使するには, そのテクニックをいつ用いるかを明確に把握していなくてはならないし, テクニックを自力で実行できなくてはならない. そのための計算力も必要である.

☆必要な基本事項（参考書レベル）☆

最初にこの問題を解くために必要な, 参考書レベルの基本事項を確認しておこう. 以下のテクニックを例題をあげながら順に述べていく.

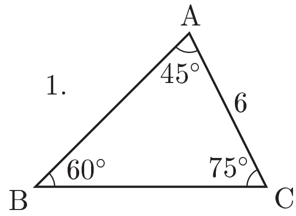
三角比（正弦定理と余弦定理）の利用

教科書や参考書にのっている以下の一連の問題は, 「正弦定理と余弦定理の練習問題」ということになっているが, そのポイントは, 「辺や角が与えられて 1 つに確定した三角形の ― 言い換えれば, その条件で描ける三角形は 1 つだけということ ― 残りの辺と角を求める」ことに「正弦・余弦定理」を用いるということにある. ただ漫然と学ぶのではなく, それぞれの問題の意図をよくつかんでおいて欲しい. 基礎には自信がある生徒は, 解答を見ずに自力で解いてみるとよいだろう.

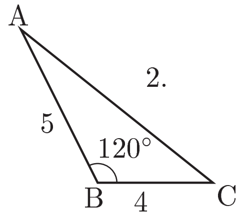
1. $\triangle$ABC において, $\mathrm{CA} = 6, \angle \mathrm{A} = 45^\circ, \angle \mathrm{C} = 75^\circ$ のとき, BC を求めよ.
2. $\triangle$ABC において, $\mathrm{AB} = 5, \mathrm{BC} = 4, \angle \mathrm{B} = 120^\circ$ のとき, CA を求めよ.
3. $\triangle$ABC において, $\mathrm{AB} = 5, \mathrm{BC} = 7, \mathrm{CA} = 3$ のとき, ∠A を求めよ.
4. $\triangle$ABC において, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2, \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} = 75^\circ$ のとき, BC を求めよ.
   ただし, $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ とする.

以下, 解説と解答である.

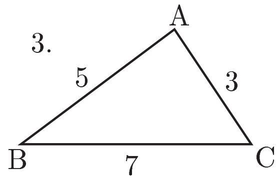
1. 「2 角と夾辺」がわかっている三角形に対して「残りの辺」を求める.
   $\angle \mathrm{B} = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ より, 正弦定理 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\sin \mathrm{B}}$ を用いて, $\mathrm{BC} = \dfrac{\mathrm{CA}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 6 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \underline{2\sqrt{6}}$



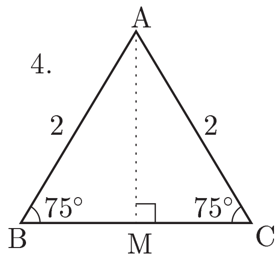
2. 「2 辺と夾角」がわかっている三角形に対して「残りの辺」を求める.
   余弦定理 $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos \mathrm{B}$ を用いて,
   $\mathrm{CA}^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos 120^\circ = 41 + 20 = 61 \quad \therefore\ \mathrm{CA} = \underline{\sqrt{61}}$



3. 「3 辺」がわかっている三角形に対して「残りの角」を求める.
   余弦定理 $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos \mathrm{A}$ を用いて, $\cos \mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \dfrac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\dfrac{1}{2} \quad \therefore\ \angle \mathrm{A} = \underline{120^\circ}$



4. 「等辺と底角」がわかっている二等辺三角形に対して「底辺」を求める. BC の中点を M とするとき, AM⊥BC だから,
   $\dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \mathrm{BM} = \mathrm{AC}\cos 75^\circ \qquad \therefore\quad \mathrm{BC} = 2\cdot 2\cdot \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \underline{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
   【注】もちろん, $\angle \mathrm{A} = 180^\circ - 2\times 75^\circ = 30^\circ$ より, 余弦定理 $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos \mathrm{A} = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8 - 4\sqrt{3}$ を用いて, $\mathrm{BC} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ としてもよいが, 余弦定理で辺の長さを求める計算は面倒であるから, あまり良いやり方とは言えない. こういう計算に関することも, テクニックとして頭に入っている方がよい.



三角関数の最大最小

適当な置き換えによって, 数 I の二次関数の最大最小（たとえば「$y = x^2 - 2x + 3$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値・最小値を求めよ.」）に帰着させるというテクニックはよく利用される. 三角関数なら, 与えられた式を 1 種類（例： $\sin x$, $\cos 2\theta$ など）に統一して置き換える. 最もよく出題されるタイプである.

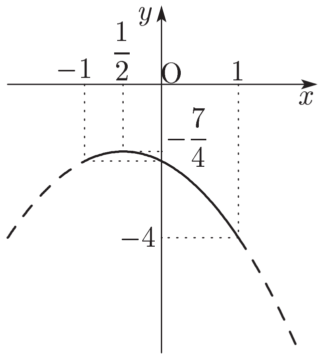
三角関数は公式の多い分野であるが, それぞれの公式が, どういう目的の為に使われるのかをよく押さえておいて欲しい. たとえば次のようにである.

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$（基本公式） は $2n$（偶数）乗の sin を cos の式へ—またはその逆へ—書き換えるための公式
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$（sin の倍角公式） は $\sin 2x$ を x の式へ書き換えるための公式
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$（cos の倍角公式） は $\cos 2x$ を x の式へ書き換えるための公式, または $\sin^2 x$ や $\cos^2 x$ を $\cos 2x$ へ統一するための公式

ちなみに三角関数のほとんどの公式はその場で作れるものばかりで, 全てを暗記している必要はない. 似たような公式を覚え間違えれば, むしろ命取りになってしまう. その場の目的に合った式を手早く作れることが大切なのだ

では早速, 代表的な例題に当たってみよう. 今回も自信のある向きは, 解説を読まずに挑戦してもらいたい.

$0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ において, $y=\sin^2 2x+2\sin^2 x-4$ の最大値, 最小値を求めよ.



$\cos 2x$ への変形を目標とする.
$\sin^2 2x=1-\cos^2 2x, \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より
$y=1-\cos^2 2x+1-\cos 2x-4=-\cos^2 2x-\cos 2x-2$
ここで $t=\cos 2x$ とおくと $0^\circ \leqq 2x \leqq 180^\circ$ より
$-1 \leqq \cos 2x \leqq 1 \quad \therefore \quad -1 \leqq t \leqq 1$ である.
$y=-t^2-t-2=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$
右のグラフより, 最大値 $-\dfrac{7}{4}$, 最小値 -4

【注】もちろん, $\sin x$ への変形を目標として, $y=-4\sin^4 x+6\sin^2 x-4$ ここで $u=\sin^2 x$ とおいて, $0 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \therefore \quad 0 \leqq u \leqq 1$ の範囲で $y=-4\left(u-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{7}{4}$ としてもよいが, 次数が上がると一般的には困る事態が多いので, 可能な状況では $\cos 2x$ に統一して次数を抑えるようにしておいた方がよい. これもテクニックとして知っておかなくてはならないことの一つである.

☆入試問題の攻略☆

さて, 今述べた基本事項を利用して, はじめの問題を解いていこう. 問題は, 2 つの過程すなわち

- 線分 CM の長さを θ で表す.
- 表された θ の式から, CM の長さのとりうる値の範囲を求める.

に分けていくとわかり易いだろう.

ここまでの例題がスラスラと出来ていないようでは, 基礎に問題がある. 基礎がしっかりしないうちに難問に手を出しても, (プライドは満足するかもしれないが) 何も身に付かない. 未習範囲ではないはずだから, 明らかに練習不足である.
一方, 例題は出来たのにはじめの問題が解けないのなら, 「どういう状況でその知識を用いるか」が不足している. 適切な解法が浮かんでくるのはひらめきではない. 理論的かつ合理的に最適なテクニックが選択されなければ, 試験場でひらめくまで何年も浪人することになってしまう.

線分 CM の長さを θ で表す

1 回の計算で, CM の長さを θ で表すのは無理である. 確定している三角形から, 正弦定理と余弦定理をつないでデータを求める. 具体的には, 調べたい値 CM を含む三角形のうち, 確定させられる △CMB が目標である.

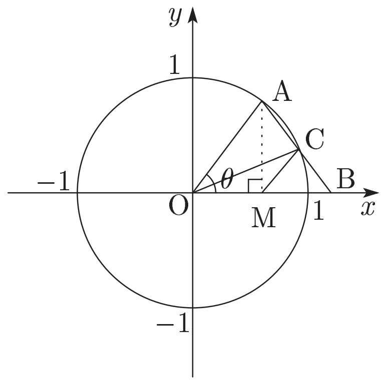
1. 二等辺三角形 AOB は「等辺と底角」がわかっているので, 「底辺 OB」を θ で表すことができる. これから, 辺 BM の長さも θ で表せる.

2. 二等辺三角形 OAC も「等辺と底角」がわかっているので, 「底辺 AC」を θ で表すことができる. これから, 辺 BC の長さも θ で表せる.

3. △CBM において「2 辺 (BM と BC) と夾角」がわかるので, 「残りの辺 CM」を θ で表すことができる.

という段階をふんでいけばよい.

△CMO も調べたい値 CM を含むが, 辺 CO と辺 MO が得られても, 角度が一つもわからないため確定させられない.



【解答（前半）】 AO=AB= 1 で ∠AOB= θ だから

BM=OM=AO$\cos\theta = 1\cdot\cos\theta = \cos\theta$

OA=OC= 1 で ∠OAC= $180^\circ - 2\theta$ だから

AC=2OA$\cos(180^\circ - 2\theta) = -2OA\cos 2\theta$

$\therefore$　BC=AB−AC= $1 + 2\cos 2\theta$

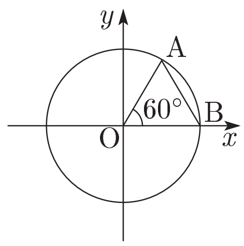
△CBM に余弦定理を用いて,

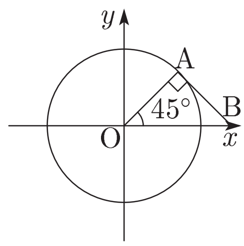
$\mathrm{CM}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\theta$

$= (1+2\cos 2\theta)^2 + \cos^2\theta - 2(1+2\cos 2\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta$

表された θ の式から, CM の長さのとりうる値の範囲を求める

さて, こうして θ で表された CM の長さのとりうる値の範囲を求めてみよう. CM^2 が θ の関数となっているのだから, 前述の通り 1 種類（ここでは $\cos 2\theta$）に統一して置き換えればよい. ただし, ここで一つ問題がでてくる. 三角形の内角になる θ にはとりうる値の制限がある. それも $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のような単純なものではなく, 「線分 AB が両端以外に円と交点をもつ」条件を考えなければならない. AO=AB なる二等辺三角形 AOB ができるように, x 軸上で点 B を左右に動かしながら考えるとわかりやすいだろう. すなわち,





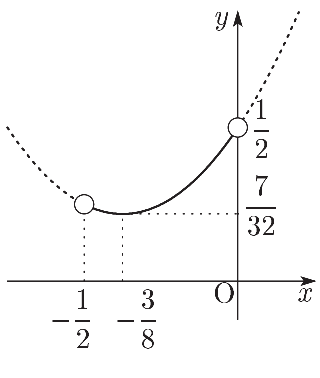
• B が x 軸上で最も左にあるときは, B が点 (1, 0) となるときで, これから左へ移動させた場合, 線分 AB と円は共有点を持たない. このとき, △OAB は正三角形となるから, $\theta = 60^\circ$

• B が x 軸上で最も右にあるときは, 線分 AB が円の接線となるときで, これから右へ移動させた場合, 線分 AB と円は共有点を持たない.
このとき, △OAB は ∠OAB= $\angle R$ の直角二等辺三角形となるから, $\theta = 45^\circ$

【解答（後半）】 ここで $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を代入すると,

$\mathrm{CM}^2 = (1+2\cos 2\theta)^2 + \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} - (1+2\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta) =$

$2\cos^2 2\theta + \dfrac{3}{2}\cos 2\theta + \dfrac{1}{2}$ ここで $t = \cos 2\theta$ とおくと, $90^\circ < 2\theta < 120^\circ$ より $-\dfrac{1}{2} < \cos 2\theta < 0$　　$\therefore$　$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ である.



よって関数 $y = 2t^2 + \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{2}$　$\left(-\dfrac{1}{2} < t < 0\right)$ のとりうる値を求めればよい. $y = 2\left(t + \dfrac{3}{8}\right)^2 + \dfrac{7}{32}$ となるので右のグラフより, $\dfrac{7}{32} \leqq y < \dfrac{1}{2}$. つまり, $\underline{\dfrac{\sqrt{14}}{8} \leqq \mathrm{CM} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

理論で攻略する化学反応 ／ 電気分解

化学というと, 結果としての反応を何でもかんでも暗記すれば良いと思っている人が多いが, 果たしてそうなのか. その辺りを考えてみよう. 今回は以下の入試に出題される電気分解の反応式を取り上げてこの問題を考えてみよう.

- 希硫酸
  (−)Pt 極 |H_2SO_4|Pt 極 (+)

  陽極: $2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

  陰極: $2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$

- 濃塩酸
  (−)Pt 極 |HCl|C 極 (+)

  陽極: $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

  陰極: $2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$

- 食塩水
  (−)Hg 極 |NaCl|C 極 (+)

  陽極: $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

  陰極: $Na^+ + e^- \longrightarrow Na$

- 硫酸銅水溶液
  (−)Pt 極 |$CuSO_4$|Pt 極 (+)

  陽極: $2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

  陰極: $Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硫酸銅水溶液
  (−)Cu 極 |$CuSO_4$|Cu 極 (+)

  陽極: $Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

  陰極: $Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硫酸ニッケル水溶液
  (−)Pt 極 |$NiSO_4$|Pt 極 (+)

  陽極: $2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

  陰極: $Ni^{2+} + 2e^- \longrightarrow Ni$

- 溶融水酸化ナトリウム
  (−)Fe 極 |NaOH|C 極 (+)

  陽極: $4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-$

  陰極: $Na^+ + e^- \longrightarrow Na$

- 水酸化ナトリウム水溶液
  (−)Pt 極 |NaOH|Pt 極 (+)

  陽極: $4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-$

  陰極: $2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

- 食塩水
  (−)Pt 極 |NaCl|C 極 (+)

  陽極: $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

  陰極: $2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

- 塩化銅水溶液
  (−)Pt 極 |$CuCl_2$|Pt 極 (+)

  陽極: $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

  陰極: $Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硝酸銀水溶液
  (−)Pt 極 |$AgNO_3$|Pt 極 (+)

  陽極: $2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

  陰極: $Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$

- 硝酸銀水溶液
  (−)Ag 極 |$AgNO_3$|Ag 極 (+)

  陽極: $Ag \longrightarrow Ag^+ + e^-$

  陰極: $Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$

- 溶融塩化ナトリウム
  (−)Fe 極 |NaCl|C 極 (+)

  陽極: $2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

  陰極: $Na^+ + e^- \longrightarrow Na$

- 溶融酸化アルミニウム
  (−)C 極 |Al_2O_3|C 極 (+)

  陽極: $O^{2-} + C \longrightarrow CO + 2e^-$
  または
  $2O^{2-} + C \longrightarrow CO_2 + 4e^-$

  陰極: $Al^{3+} + 3e^- \longrightarrow Al$

＜注＞ 溶融○○とは, 水溶液でなく固体の○○を加熱して, 液体にしたものをいう. 当然かなりの高温になる.

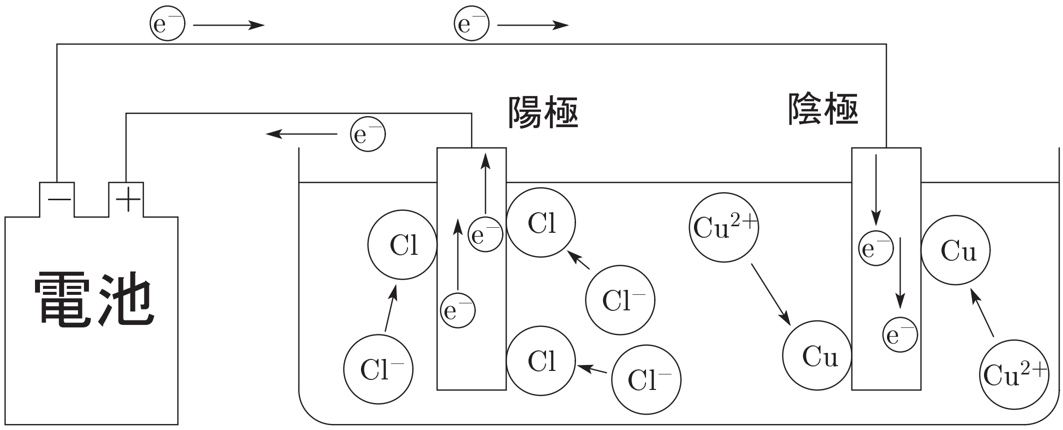
これら一連の反応式を暗記することが不可能だとは言わないが （事実, 暗記している受験生もたくさんいる）, 反応式そのものを暗記するのではなく, 反応のしくみや基準を覚えた方がはるかに効率がよいし, どんな結果になるか暗記されていない化合物, 条件においても生成物や反応式を推測できるようになる. 次の電気分解反応の理論をよく理解してから, もう一度, 上記の反応式にその理論を適用してみて欲しい.

2.1 電気分解の基本概念

電気分解の基本的な概念を確認しよう.

陽極 直流電源 (電池など) の正 (+) 極に接続された電極を「陽極」と言う. 陽極においては, 電極から導線に向けて電子 (e^-) が移動する. 陽極では何かの物質がつねに電子を生じさせている. (例の図では Cl^- イオン)

陰極 直流電源 (電池など) の負 (−) 極に接続された電極を「陰極」と言う. 陰極においては, 導線から電極に向けて電子が移動する. 陰極では何かの物質がつねに電子を受け入れている. (例の図では Cu^{2+} イオン)



2.2 陽極の反応

陽極は電子 e^- が不足しているので, 誰かが e^- を放出 (供給) しなければならない. 陽極で e^- を放出する可能性のある物質は, 2 つ考えられる.

- 極板の金属が, e^- を放出する.
- 溶液中の陰イオンが, e^- を放出する.

極板の金属と溶液中の陰イオン, どちらが e^- を放出するのかと考えてみたときに, 導線により近いのは極板なのだから, 極板の金属が e^- を放出しやすければ (金属は一般に陽イオンになりやすい—e^- を放出しやすいのではあるが ...), 当然溶液中の陰イオンより優先して e^- を放出することになる.

この基準となるのはイオン化列 (金属の e^- の放出しやすさ) である. 具体的には, **Pt と Au はイオン化傾向がきわめて小さいので, e^- を放出しないが, それ以外の金属はすべて e^- を放出することになる.**

[イオン化列と e^- を放出する金属]

$$\underbrace{\mathrm{K\ Ba\ Ca\ Na\ Mg\ Al\ Zn\ Fe\ Ni\ Sn\ Pb\ (H)\ Cu\ Hg\ Ag}}_{e^-\text{を放出する金属}} \qquad \underbrace{\mathrm{Pt\ Au}}_{e^-\text{を放出しない金属}}$$

加えて電気分解では, 炭素 (C) 極がよく用いられるが, 炭素原子は最外殻軌道の電子が 4 つであることより, 共有結合を好み e^- を放出しにくい (および受け入れにくい) 元素である. したがって,

1. 金属が e^- を放出する場合

   合金のような何種類もの金属が混ざってできた極板でもない限り, 判断の基準は明解である. 極板が Pt, Au, C 以外の場合は, その極板の金属が e^- を放出し, さらに金属自体は陽イオンになって溶液中へ移動する.

2. 金属 (C を含む) が e^- を放出しない場合

   極板が Pt, Au, C の場合は, 金属のかわりに溶液中の陰イオンが e^- を放出する.

さて, 溶液中の陰イオンが e^- を放出する場合について, もう少し詳しく述べよう. 溶液中の陰イオンが一種類なら問題ないが, いくつかの陰イオンが含まれる場合, どの陰イオンが e^- を放出しやすいかが問題になってくる. まず,

$$\boxed{\text{水溶液中には必ず, } \mathrm{OH^-} \text{ イオンが含まれている}}$$

ことに注意しよう. さらに, 次の「陰イオンの e^- の放出しやすさ」を知っていなければならない.

[陰イオンの e^- の放出しやすさの順序]

$$I^- \ Br^- \ Cl^- \ OH^- \ SO_4^{2-} \ NO_3^-$$

ただし実戦的には, ハロゲンイオン (I^-, Br^-, Cl^- など) が何種類も混合された溶液を電気分解するなどということはないし, 水溶液には必ず OH^- イオンが含まれることを考えると, 次の通りに覚えておけば十分である.

$$\text{ハロゲンイオン} > \mathrm{OH^-} > \text{その他の陰イオン}$$

これに加えて, 放出する陰イオンが OH^- の場合,

$$4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^- \qquad \cdots\cdots(A)$$

によって O_2 が発生するが, この反応では次の注意が必要である.

- 溶液の液性による影響

  ＜酸・中性＞ 電離した OH^- イオンは少量なので実際には OH^- イオンは H_2O の電離によって生じたものがほとんどである. このとき OH^- イオンばかりではなく, 同数の H^+ イオンも生じるので, 反応式は (A) の反応式の両辺に生じた 4 個の H^+ を加え,

  $$4H_2O \longrightarrow 2H_2O + 4H^+ + O_2 + 4e^-$$

  とし, さらに「両辺に同一物質がある場合は相殺する」という化学反応式の作成ルールに従い. 両辺より $2H_2O$ を差し引く. そこで酸・中性における OH^- イオンの反応式は

  $$2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$$

  で表されるように, OH^- イオンではなく, H_2O 分子の電離によって生じた OH^- が e^- を放出するという形になる.

  ＜塩基性＞ 電離した OH^- イオンが大量に存在するので, 上記 (A) の反応式通り,

  $$4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-$$

  で表される反応が速やかに進む.

【陽極の反応式】

以上の点に注意すると陽極における反応式は, 以下のいずれかのタイプになることがわかる.

1. 金属が e^- を放出する場合　　金属の元素記号を M とすると,
$$M \longrightarrow M^{n+} + ne^-$$
(ただし n はその金属の価数)

2. 溶液 (液体) 中の陰イオンが e^- を放出する場合

   (1) ハロゲン　　ハロゲンの元素記号を X とすると,
   $$2X^- \longrightarrow X_2 + 2e^-$$

   (2) 水酸化物イオン　　**<酸・中性>** $2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

   <塩基性> $4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-$

   (3) 酸化物イオン (溶融塩電解のみ)
   極に炭素 (C) を用いることが多いので, この場合極は e^- を放出しない. かわりに液体中の唯一の陰イオンである O^{2-} が e^- を放出して生成した酸素原子は炭素極と反応する.
   $$O^{2-} + C \longrightarrow CO + 2e^- \quad \text{または} \quad 2O^{2-} + C \longrightarrow CO_2 + 4e^-$$

2.3 陰極の反応

陰極には電子 e^- がたまっており, 誰かが e^- を受け入れなければならない. 極板は金属だから e^- を放出する可能性はあっても, 受け入れることは絶対あり得ない (炭素 (C) 極も含めて). そこで溶液中の陽イオンがこれを受け入れる. もし, 2 種類以上の陽イオンが存在する場合, 溶液中のイオン化傾向の一番小さい陽イオンが e^- を受け入れることになる.

$$\boxed{\text{水溶液中には無条件に, } H^+ \text{ イオンが含まれている.}}$$

ことに注意してイオン化列を目安として判断する.

[イオン化列]
K Ba Ca Na Mg (水の H) Al Zn Fe Ni Sn Pb (H) Cu Hg Ag Pt Au

を暗記しておくことが必須条件である. 溶液中に存在する陽イオンを比較して, イオン化列の一番右に位置する (最も陽イオンになりたくない $\Longrightarrow$ e^- を放出しにくい $\Longrightarrow$ e^- を受け入れやすい) 元素の陽イオンが e^- を受け入れる. さらに, 受け入れる陽イオンが H^+ の場合,

$$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2 \qquad \cdots\cdots \text{(B)}$$

によって H_2 が発生するが, この反応には, いくつかの注意を加える必要がある.

1. 溶液の液性による影響

   <酸性> 電離した H^+ イオンが大量に存在するので, 上記 (B) の反応式通り,
   $$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$$
   で表される反応が速やかに進む. 他のイオンとの比較は, イオン化列における通常の (H) の位置で判断する.

＜中・塩基性＞ 電離した H^+ イオンは少量なので実際には H^+ イオンは H_2O の電離によって生じたものがほとんである．このとき H^+ イオンばかりでなく, 同数の OH^- イオンも生じるので, 反応式は (B) の反応式の両辺に生じた 2 個の OH^- を加え,

$$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$$

で表されるように, H^+ イオンではなく, H_2O 分子の電離によって生じた H^+ が e^- を受け入れるという形になる．この場合他のイオンとの比較も, イオン化列における通常の (H) の位置で判断するのではなく, 左へ移動した (水の H) で考える．すなわち, 「反応が進みにくい ($= e^-$ を受け入れにくい) $\Longrightarrow$ イオン化傾向が大きい」と考えるのである．具体的には, 中・塩基性の場合, (H) の位置は, Mg と Al の間に移動する．([イオン化列] の (水の H) を参照)

2. 水素過電圧による影響
反応 $2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$ ($2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$ を含む) は金属イオンが e^- を受け入れる反応に比べやや複雑で,

(1) H^+ が極板より e^- を受け入れ, H 原子になる．
(2) 2 個の H 原子が結合して H_2 分子になる．

という 2 つの過程があるが, 反応の途中で一時的に生成する「水素原子と極板の金属との相性の良し悪し」によって, この反応の起こりやすさが変わってくる．結論として, 反応の起こりにくい極板を用いた場合, より高い電圧をかけてやる必要がでてくる．これを「水素過電圧」という．もっとも受験生諸君は水素過電圧について, 「そういう判断の基準がある」ことを知ってるだけでよく, 以下の 2 点を抑えておけば申し分ない.

- Pt は水素過電圧が最も低く, H_2 が発生しやすい.
- Hg は水素過電圧が最も高く, H_2 が発生しにくい.

[水素過電圧]
(低) Pt Fe Ag Cu Pb Zn Hg (高)

したがって H_2 が発生すると判断できる場合でも, 極板の金属の水素過電圧が高いときは, その他の溶液中の陽イオン (金属イオン) が反応することになる.

【陰極の反応式】

以上の点に注意すると陰極における反応式は, 以下のいずれかのタイプになることがわかる.

(1) H_2 が発生する反応

＜酸性＞ $2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$

＜中・塩基性＞ $2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

(2) 金属が析出する反応　　金属の元素記号を M とすると,

$$M^{n+} + ne^- \longrightarrow M$$

(ただし n はその金属の価数)

反応そのものを暗記するのではなく, 反応のルールを理解して覚えておけば, 始めにあげた14の反応式のみならず, どんな極, どんな溶液 (液体) を組み合わせた電気分解でも, その反応を推測できるようになる.

私大を中心とした暗記型の出題にも, 国公立大を中心とした思考型の出題にも対応できるこんな勉強方法で難関を突破して欲しい.

2.4 反応の説明

- 希硫酸 $(-)$Pt 極 $|H_2SO_4|$Pt 極 $(+)$

  陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, SO_4^{2-} と OH^- が存在するが, OH^- の方が e^- を放出しやすい. 酸性であることに注意して反応式は,

  $$2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$$

  陰極: 溶液中の陽イオンは H^+ だけなので, 酸性であることに注意して反応式は,

  $$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$$

- 水酸化ナトリウム水溶液 $(-)$Pt 極 $|NaOH|$Pt 極 $(+)$

  陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは OH^- だけなので, 塩基性であることに注意して反応式は,

  $$4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-$$

  陰極: 溶液中の陽イオンは, Na^+ と H^+ が存在するが, H^+ の方が e^- を受け入れやすく, 極 Pt の水素過電圧も低い. 塩基性であることに注意して反応式は,

  $$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$$

- 濃塩酸 $(-)$Pt 極 $|HCl|$C 極 $(+)$

  陽極: 極は, C なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, Cl^- と OH^- が存在するが, Cl^- の方が e^- を放出しやすい. 反応式は,

  $$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$$

  陰極: 溶液中の陽イオンは H^+ だけなので, 酸性であることに注意して反応式は,

  $$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$$

- 食塩水 $(-)$Pt 極 $|NaCl|$C 極 $(+)$

  陽極: 極は, C なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, Cl^- と OH^- が存在するが, Cl^- の方が e^- を放出しやすい. 反応式は,

  $$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$$

  陰極: 溶液中の陽イオンは, Na^+ と H^+ が存在するが, H^+ の方が e^- を受け入れやすく, 極 Pt の水素過電圧も低い. 塩基性であることに注意して反応式は,

  $$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$$

- 食塩水 $(-)$Hg 極 $|NaCl|$C 極 $(+)$

  陽極: 極は, C なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, Cl^- と OH^- が存在するが, Cl^- の方が e^- を放出しやすい. 反応式は,

  $$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Na^+ と H^+ が存在し, H^+ の方が e^- を受け入れやすすが, 極 Hg の水素過電圧は高いので, Na^+ が e^- を受け入れる. そこで反応式は,

$Na^+ + e^- \longrightarrow Na$

- 塩化銅水溶液　$(-)$Pt 極 $|CuCl_2|$Pt 極 $(+)$

陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, Cl^- と OH^- が存在するが, Cl^- の方が e^- を放出しやすい. 反応式は,

$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Cu^{2+} と H^+ が存在するが, Cu^{2+} の方が e^- を受け入れやすいので, 反応式は,

$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硫酸銅水溶液　$(-)$Pt 極 $|CuSO_4|$Pt 極 $(+)$

陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, SO_4^{2-} と OH^- が存在するが, OH^- の方が e^- を放出しやすい. 中性 (正しくは弱酸性だが, そんなことは知らなくても結果は同じである) であることに注意して反応式は,

$2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Cu^{2+} と H^+ が存在するが, Cu^{2+} の方が e^- を受け入れやすいので, 反応式は,

$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硝酸銀水溶液　$(-)$Pt 極 $|AgNO_3|$Pt 極 $(+)$

陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, NO_3^- と OH^- が存在するが, OH^- の方が e^- を放出しやすい. 中性 (正しくは弱酸性だが, そんなことは知らなくても結果は同じである) であることに注意して反応式は,

$2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Ag^+ と H^+ が存在するが, Ag^+ の方が e^- を受け入れやすいので, 反応式は,

$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$

- 硫酸銅水溶液　$(-)$Cu 極 $|CuSO_4|$Cu 極 $(+)$

陽極: 極の金属が Cu なので, これが反応する. 反応式は,

$Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Cu^{2+} と H^+ が存在するが, Cu^{2+} の方が e^- を受け入れやすいので, 反応式は,

$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

- 硝酸銀水溶液　$(-)$Ag 極 $|AgNO_3|$Ag 極 $(+)$

陽極: 極の金属が Ag なので, これが反応する. 反応式は,

$Ag \longrightarrow Ag^+ + e^-$

陰極: 溶液中の陽イオンは, Ag^+ と H^+ が存在するが, Ag^+ の方が e^- を受け入れやすいので, 反応式は,

$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$

- 硫酸ニッケル水溶液　$(-)\mathrm{Pt}$ 極 $|\mathrm{NiSO_4}|\mathrm{Pt}$ 極 $(+)$

陽極: 極の金属は, Pt なので反応しない. 溶液中の陰イオンは, $\mathrm{SO_4^{2-}}$ と $\mathrm{OH^-}$ が存在するが, $\mathrm{OH^-}$ の方が $\mathrm{e^-}$ を放出しやすい. 中性 (正しくは弱酸性だが, そんなことは知らなくても結果は同じである) であることに注意して反応式は,

$$\mathrm{2H_2O \longrightarrow 4H^+ + O_2 + 4e^-}$$

陰極: 溶液中の陽イオンは, $\mathrm{Ni^{2+}}$ と $\mathrm{H^+}$ が存在するが, $\mathrm{Ni^{2+}}$ の方が 水から生じた $\mathrm{H^+}$ よりも $\mathrm{e^-}$ を受け入れやすい. 反応式は,

$$\mathrm{Ni^{2+} + 2e^- \longrightarrow Ni}$$

- 溶融塩化ナトリウム　$(-)\mathrm{Fe}$ 極 $|\mathrm{NaCl}|\mathrm{C}$ 極 $(+)$

陽極: 極は, C なので反応しない. 溶融した液体中の陰イオンは $\mathrm{Cl^-}$ だけなので反応式は,

$$\mathrm{2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-}$$

陰極: 溶融した液体中の陽イオンは $\mathrm{Na^+}$ だけなので反応式は,

$$\mathrm{Na^+ + e^- \longrightarrow Na}$$

- 溶融水酸化ナトリウム　$(-)\mathrm{Fe}$ 極 $|\mathrm{NaOH}|\mathrm{C}$ 極 $(+)$

陽極: 極は, C なので反応しない. 溶融した液体中の陰イオンは $\mathrm{OH^-}$ だけなので反応式は,

$$\mathrm{4OH^- \longrightarrow 2H_2O + O_2 + 4e^-}$$

陰極: 溶融した液体中の陽イオンは $\mathrm{Na^+}$ だけなので反応式は,

$$\mathrm{Na^+ + e^- \longrightarrow Na}$$

- 溶融酸化アルミニウム　$(-)\mathrm{C}$ 極 $|\mathrm{Al_2O_3}|\mathrm{C}$ 極 $(+)$

陽極: 溶融した液体中の陰イオンは $\mathrm{O^{2-}}$ だけで, 分解によって生じた O と極 C が反応するので反応式は,

$$\mathrm{O^{2-} + C \longrightarrow CO + 2e^-}$$

または

$$\mathrm{2O^{2-} + C \longrightarrow CO_2 + 4e^-}$$

陰極: 溶融した液体中の陽イオンは $\mathrm{Al^{3+}}$ だけなので反応式は,

$$\mathrm{Al^{3+} + 3e^- \longrightarrow Al}$$

物理公式の使いどころ ／ 摩擦力

今回は, 摩擦の問題を題材にして, 本当に必要な知識とは何なのか, 公式を覚えることだけでは入試で全く通用しない, ということを理解してもらいたいと思う.

3.1　力学の考え方

物理は, ほとんどの分野で力学がベースになっている. その力学では力を調べることによって, 物体の運動を「予測」することが中心になる（力だけでは調べにくいときにエネルギー保存則や運動量保存則が登場する）. この「予測」は『(自分の実生活の経験から）こうなるだろう』とヤマをはることとは全く違う. 運動をはじめたときにかかっている力から, 加速度（運動の性格を決定する値）をあくまで理論的に求め, そこから速度や座標を計算することを表している.
とにかく, 力から物事を考えるのであって, 運動を予想して『物体が右に動いているのだから右向きに力がかかっているだろう』などと考えてはいけない. これでは順序が逆である. 物体にかかる力は, 誰でも必ずきちんと指摘できるようになる. **先入観をなくして機械的に処理していく**ことがポイントである.
力の探し方や表し方の前に, 力を探したあとのことを説明しておこう.

運動方程式の意義

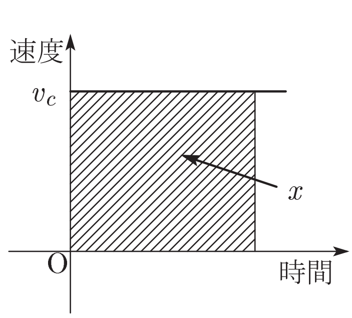
調べ上げた力から加速度を求めるのが運動方程式の第一の役割である. 加速度（高校物理ではほとんど一定値 : a）さえわかれば, 以下の速度 (v) の式と座標 (x) の式から未来の場所と運動を「予測」することが出来るからである.

$$\text{座標の式：}\quad x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$$
$$\text{速度の式：}\quad v = v_0 + a \cdot t$$

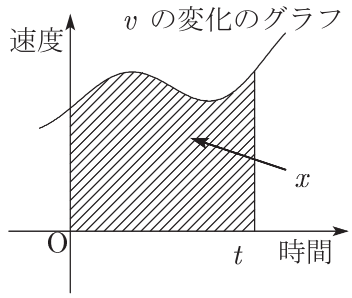
ただし x_0 ははじめの座標, v_0 ははじめの速度, t は経過時間である. 有名な公式ではあるが, いきなりこのような式を出されても困る諸君もいるだろうし, 第一, 加速度の意味すらアヤシイ向きもあるかもしれない. ちょっと確認してから力を調べに行こう.

加速度の意味

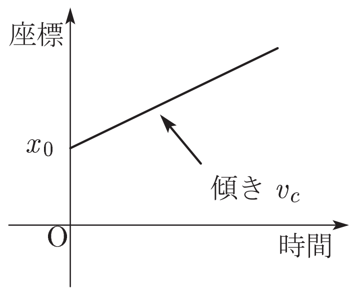
物理では統一したルールで物の位置を表す必要があり, 物体のある場所を座標という. 具体的には原点と 2 つの直交座標で表す. 数学でよく見る直交座標系と似ているが, 2 本の座標軸が水平と鉛直である必要がない点で異なる. また, 位置の差の絶対値を距離という.
次に速度について説明する.
速度とは「単位時間内における座標の変化量」のことである. 速度が一定であるとは, ある時間（具体的に 1 秒などを考えればよい）ごとの座標の変化量が, 一定であるということになる.
一定の速度を v_c , ある時間を t とすると座標の変化量（移動距離）x は $x = v_c \cdot t$ と表せる. $v_c = \dfrac{x}{t}$ より速度の次元は, 言うまでもなく [m/s] である. グラフ内の面積は座標軸の次元の積にあたる量を表現しているため, [m/s]×[s]=[m] より右図の斜線部の面積が x にあたる.



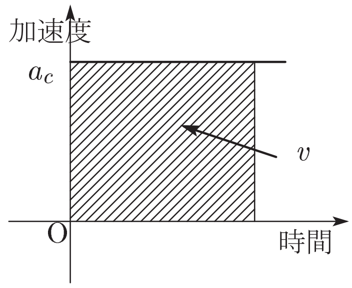
しかし, 速度が変化していく運動もある．同じようにグラフを用いて考えると, 同様に斜線部の面積が座標の変化量になる．では, この面積をどのように求めるのかというと, $x = \int_0^t v dt$ という計算, つまり積分をする必要がある．積分はまだ習っていないかもしれないが, 積分とはこのように曲線で囲まれている面積を求めるための計算方法なのである．

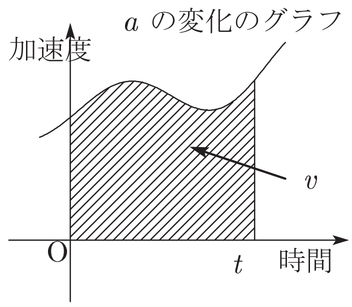


逆に, x の時間あたりの変化をグラフにすると右下図のようになる．この図で直線の傾きが一定になっているが, これは速度が一定（2 つ上の図の状態）であることを示している．
次に, 速度の変化について, もう少し考えてみる．「単位時間内における速度の変化量」を加速度という．先ほど座標が, ある時間ごとの座標の変化量が一定のときは, 速度が一定であったことを思い出すとよい．速度の変化量が一定のときは, 加速度が一定になっているのである．



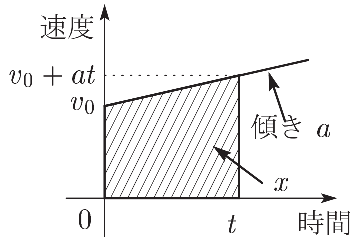
加速度はほとんどの場合 a で表され, ここでは一定の加速度を a_c とおく．
加速度 a_c が一定ということは, 速度 v のある時間 t 内の変化量は一定ということになる．これを式にすると, $v = a_c \cdot t$ となる．次元は $a_c = \dfrac{v}{t}$ より, [m/s]/[s]=[m/s^2] である．これをグラフにすると右図のようになり, 加速度が一定でないときはその下の図のようになる．これらの図の中の斜線部の面積は, 時刻 t における v の値を表す．加速度が一定でないときの面積は $v = \int_0^t a dt$ で計算できる．
ところが, 大学入試では加速度が変化する運動に関して, 速度（や座標）を積分で求めることはない．つまり, ほとんどの問題で加速度は一定であり, $v = a \cdot t \cdots (*)$ としてよい．（加速度が一定でない問題は存在するが, 別の解決法が存在する．肝心なことは加速度が一定でないときに, $v = a \cdot t$ としてはいけない．ということである．）





今までの例では, はじめの速度は 0 としていたが, はじめから速度 v_0 を持っていたとすると, $(*)$ の式は $v = v_0 + a \cdot t$ と修正される．同様に, 座標の式も修正する．先ほどは $x = v \cdot t$ と表したが, こちらもはじめの座標が 0 だったとは限らないので, はじめの座標を x_0 とおくと, $x = x_0 + v \cdot t$ になる．

では, 加速度が一定のときの, 時刻 t における座標はどうなるのだろうか．速度の変化をグラフに表すと, 右図のようになることから, 座標を求めるには斜線部の台形の面積を求めればよいはずであった．



$$x = \frac{1}{2} \times \{v_0 + (v_0 + a \cdot t)\} \times t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

はじめの座標 x_0 による修正を加えて, 先ほどの座標の式になっている．この考え方さえわかっていれば[1], 2 つの式を暗記する必要はなくなる．

[1]『わかっていれば』というのはずいぶん譲歩した表現であって, ここまで本質的なことをわかっていないと問題によっては引っ掛けにあってしまう．

3.2 力の種類

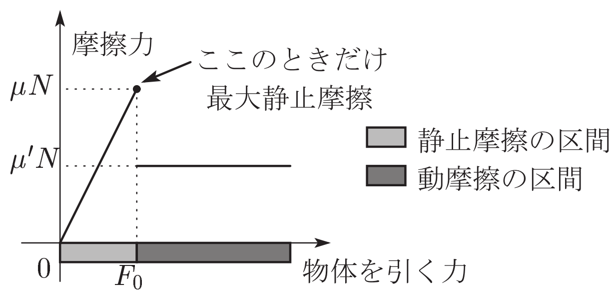
物体の運動を考えるには, その物体に外部から働く力のみを考える. そのような力のうち今回は以下の力のみを用いればよい.

重力 地球に引かれる力で, 必ず下向きに働く. 大きさは（質量）$\times g$.

垂直抗力 物体が面と接するところに働く力で, 物体を支えるように面に垂直に働く. これは N とおくことが多い.

摩擦力 粗い面と面がこすれるときに働く力で, 運動の向きと逆向きに働く. 摩擦力の大きさは状況によって異なるため, とりあえず f とおいておこう.

摩擦力と聞くとすぐにでも $f = \mu N$ とやりたくなるだろうが, そこが落とし穴なのだ. 実は摩擦力には 3 種類あり, 正確に使い分けられなくてはならない. 右のグラフと合わせて説明していこう. 物体を引く手の力と摩擦力の関係を表したものである. 動き始めるまでは手の力が大きくなっていくが, 一度動き始めると手の力はさほど大きくなくてよい. 実生活で経験しているものである.



- 物体が動いているとき $\cdots$ グラフの水平な部分で摩擦力が一定になっている. その値を運動摩擦力といい, $f = \mu' N$ と表す. 動いている最中なのだから, 物体の加速度は 0 ではない.
- 物体が動き始めるとき $\cdots$ グラフの一番高いところのことであり, 最大静止摩擦という. ご存知 $f = \mu N$ になる. また, 物体は動き出すところなので加速度は 0 である. 物を引っ張るときに『ヨッコラショ』と一番気合を入れるところである.
- 物体が止まっている（動き始めない）とき $\cdots$ グラフの斜めのところのことで, 大きさは静止摩擦力という. 最大静止摩擦力ではないから, $f = \mu N$ としては**いけない**. 摩擦力の大きさはわからないので式で表すことは出来ない. 止まっているので加速度は 0 である. 物を引っ張るときだと『ウッー』と力を入れている最中のことである.

3.3 例題と正しい解法

下の問題を例にして, 物理の問題を解く手順と先に説明した知識の使い方を確認していこう.

質量 $2m$ の物体を, 粗い水平な床の上に置き手で引く．手の引く力を F とするとき, F を大きくしていって, $\dfrac{3}{2}mg$ のとき物体が動き出した．動摩擦係数を μ' , 重力加速度を g とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $F=\dfrac{1}{2}mg$ のとき, 摩擦力の大きさを求めよ.

(2) 静止摩擦係数 μ を求めよ.

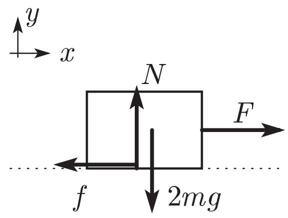
(3) F を, はじめから $2mg$ としたとき, 物体の加速度を求めよ.

(4) (3) のとき, 物体が l だけ進むのに必要な時間 t を求めよ．また, そのときの速度 v を求めよ.

問題に取り掛かる前に, 必ずやらなければならないことを済ませておこう．「やっておかなくてはならないこと」とは以下の 3 点で, どの問題でも同じである.

1. 図を書く

   物体の中に力の矢印を書き込んでやる．力が不足したり, 重複したりするとその後の全ての作業が無駄になってしまう．つまり, ここを間違うと 1 点にもならないのだ.
   まず, **重力**を書き込む．今回の質量は $2m$ なのだから, 重力の大きさは $2mg$ で下向きである. 重力のあとは物体の周囲をぐるっと見回して, 他の物体と接しているところには必ず力を書き込む.

   さて, 床に接しているのだから**床からの垂直抗力**がある．その大きさは問題文からわからないので N とおくことにする．面に垂直に上向きに働いている．次に手で引いているのだから, その力を書き込む．この大きさは問題文にあるとおり F だろう．さらに, この問題には「粗い床」という記述があることから, **床からの摩擦力**も存在するはずだ．大きさはわからない（実は小問によって変化する）ので, f とおいておくだけにする．物体は右に引かれているので, 右に動くしかない．摩擦力は運動と逆の向きに働くから左向きに働く.

2. 座標軸を設置する
   軸の設置にあたってはいくつかのルールがあるのだが, 今回は水平と鉛直でよいだろう．つまり, 図の左上にあるような x 軸と y 軸を図の横に書いておく.

3. 運動方程式を立てる
   座標軸別に運動方程式の左辺は毎回, (物体の質量) × (物体の加速度) と書く．右辺には座標軸の方向と平行な力を書いていけばよい.

運動方程式を立ててみると, 以下のようになる．軸と同じ向きに働く力を正で右辺に書き, 軸とは逆向きに働く力を負で書き込む．たったこれだけのことなのだ.

x 軸について： $2m\cdot a_x = F - f$

y 軸について： $2m\cdot a_y = N - 2mg$

ここまで準備してから各小問を考えていこう.

(1) 問題文で $F=\dfrac{1}{2}mg$ と書いてあるのだから，とりあえずこれを運動方程式の中に代入しておこう．それから，摩擦があるときの**最大のポイントは摩擦の種類の判断**であるから，先ほどのグラフを使いながら 3 つのうちのどれに当たるのかを調べる．
問題文中に「F が $\dfrac{3}{2}mg$ のとき物体が動き出した」とあるので，グラフ中の F_0 は $\dfrac{3}{2}mg$ となる．これより左側 $\left(\dfrac{1}{2}mg<\dfrac{3}{2}mg\right)$ なのだから，物体は動き出さない $(a_x=0)$ ．動き出さないが，動き出す瞬間（最大静止摩擦）ではないのだから，間違っても $f=\mu N$ とか書いてはいけない．今までの作業の結果として得られた式は，以下の 2 本である．

$$2m\cdot 0=\frac{1}{2}mg-f$$
$$2m\cdot a_y=N-2mg$$

問われている摩擦力は f なのだから，上の式から $\underline{f=\dfrac{1}{2}mg}$ である．下の式を使わなかったが，使う式だけを選んで立てておくことは不可能であるから，あらかじめ全ての式を立てておく必要があるのだ．
この問題は簡単に見えるが，入試の難問でも，定期テストでも，摩擦について聞いていることは同じような，単なる種類の判断なのである．そこのところがわかっていないと，問題ごとに解法を暗記するような間違った勉強を続けることになる．以下の設問でも同じように考えていけばよい．

(2) 静止摩擦係数を μ とおく．式を解いて値を求めるのだから，求める値を式に登場させるために，名前を付けておく．
静止摩擦係数が登場するのは，動き始める**最大静止摩擦**のときだけである．つまり，このとき $F=\dfrac{3}{2}mg$ が成り立っている．最大静止摩擦のときのみ，$f=\mu N$ が成り立っていて，**動き始めはまだ動いていない**のだから $a_x=0$ ということになる．また，上下方向にも動いていないのだから $a_y=0$ である（実は前問でもこの式は成り立っていた）．運動方程式の 2 つ目の使い方は，このようにわかっている加速度を代入して，未知の力を求めるというものである．ここまでに出てきた式を代入してみると

$$2m\cdot 0=\frac{3}{2}mg-\mu N$$
$$2m\cdot 0=N-2mg$$

下の式から作った $N=2mg$ を上の式に代入すれば，$\dfrac{3}{2}mg-\mu\cdot 2mg=0$ である．この式を解いて $\underline{\mu=\dfrac{3}{4}}$ となる．

(3) $F=2mg$ ということは，動摩擦の状態だろう．物体は y 軸方向には（浮き上がったり沈み込んだりしないから）静止し $a_y=0$, 水平方向には運動しているので $a_x\neq 0$ である．また，このとき $f=\mu' N$ も成り立っている．これらを代入した式は以下のとおりである．

$$2m\cdot a_x=2mg-\mu' N$$
$$2m\cdot 0=N-2mg$$

下の式から作った $N=2mg$ を上の式に代入して解くと

$$2ma_x=2mg-\mu'\cdot 2mg \qquad \therefore\quad \underline{a_x=(1-\mu')g}$$

ということになる．

(4) 加速度が求められたということは, 速度と座標の公式に代入できるということである. 最初に登場したとおり, x_0 をはじめの座標, v_0 をはじめの速度, t を経過時間とすれば,

$$\text{座標の式：}\quad x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$$
$$\text{速度の式：}\quad v = v_0 + a \cdot t$$

であった. 今回は移動距離しかわからないので, はじめの座標 x_0 は 0 でいいだろう. はじめの速度 v_0 も, はじめは止まっていたようだから 0 としていいだろう. l だけ移動したのだから, x に l を代入し, 加速度 a は前問から $a_x = (1-\mu')g$ である. これらを全て代入すると, 以下のような式になる.

$$l = \frac{1}{2}(1-\mu')g \cdot t^2$$
$$v = (1-\mu')g \cdot t$$

上の式から $t = \underline{\sqrt{\dfrac{2l}{(1-\mu')g}}}$ が求められ. これを下の式に代入すれば, $v = \underline{\sqrt{2l(1-\mu')g}}$ である.

あるいは v を求めるだけなら以下のような別解も存在する. 物理をよく勉強している人なら, $v^2 - v_0^2 = 2aS$ という公式を見たことがあるはずだ. 座標の式で $x_0 = 0$ とし, 速度の式を t について解く. これを座標の式に代入すると

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad \therefore \quad x = v_0 \cdot \frac{v-v_0}{a} + \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad \therefore \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$$

普通は $x = S$ と置き換えて $v^2 - v_0^2 = 2aS$ としていることだろう. この式を用いれば一気に v を求めることが可能だ. 今回は $v_0 = 0$ なので,

$$v^2 = 2ax = 2(1-\mu')gl \qquad \therefore \quad v = \underline{\sqrt{2l(1-\mu')g}}$$

座標の式を見てやると, 座標 (x) と時間 (t) の式であることがわかる. 一方の速度の式は, 速度 (v) と時間 (t) の式である. この 2 式から時間 t を消去して作った第 3 の式は, 座標 (x) と速度 (v) の式であるといえる. つまり, 時間を求める必要がなく, 座標から速度を, もしくは速度から座標を求めたいときに効果を発揮する式である. 使いどころを間違えないようにしてもらいたい.

解法を見てもらえばわかるとおり, 使った式は「座標の式」と「速度の式」と「運動方程式」と「 $f = \mu N$ 」ぐらいのもので, 式を完全に暗記しなければならないものはない. 公式を覚えるよりも大事なことは, 正しい手順と状況判断である. 正しい手順で解いていれば, どのような問題でも同じように正解に辿り着ける. 状況判断ができていなければ, いくら式や解法を暗記していても思うように得点は伸びない.
問題を見たら積極的に判断ポイントを見つけ出し, 自主的に判断できるようになる必要があるのだ. もちろん, 手順と判断能力を身につけるためには, いくらかの練習は必要である.