授業のエッセンス

三角関数の処理 ／ 基礎編

東大　京大　早慶　東工大　一橋大　国立医学部他

大学受験　多摩理数科教室

東京都府中市片町２－ ２４－ ２　レジデンスＨ＆Ｋ１０２号室

TEL：０５０－ ３７３６－ ８７４９

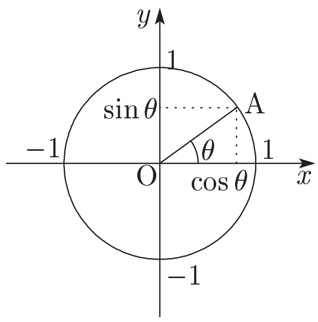
http://www.tamajyuku.com/

三角関数の処理 ／ 基礎編

この冊子は, 当教室の授業で使われるテキストの抜粋である.
授業ではこのようなテキストをベースに, さらに細かい注意や演習も行う.
　内容は入試の必須テクニックだが, この中のテクニックをいくつ知っているだろうか？
聞いたことのあるテクニックもあると思うが, それらをいつ動員するかは答えられるだろうか？
式を見たことはあっても, 自分一人で何も見ずに解けるのだろうか？
入試に臨んで最低限, 身に付けておかなくてはならないことは何だろうか？
　全ての人にとって得るところがあるように編集したつもりである.
まずは気楽に目を通してもらいたい.

1.1　三角比の再定義と三角方程式の基礎

三角関数 (sin, cos, tan) の定義の仕方はいろいろあるが, 単位円を用いた方法は完全にマスターしておきたい. これは角度が 90° よりも大きくなったときに備えてである.
単位円 ($x^2 + y^2 = 1$) 上に点をとり, この点と原点を結ぶ. 左図のように θ をとる. 角度は必ず反時計回りに数える.

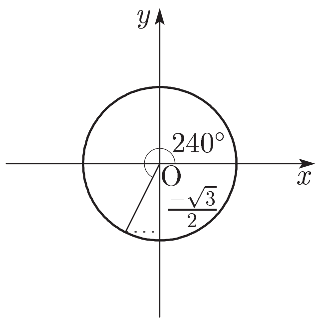


$\cos\theta$　:　点 A の x 座標の値
$\sin\theta$　:　点 A の y 座標の値
$\tan\theta$　:　直線 OA の傾き

もちろん三平方の定理より $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ が成り立っている.

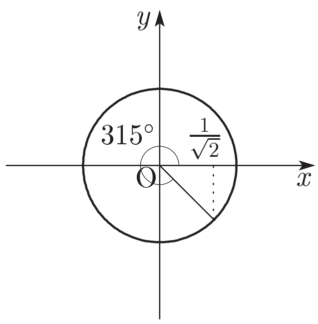
【例題】　$\sin 240°, \cos 315°$ を求めよ.

単位円上に 240° を書き込み, その点の y 座標の値を読むと 30°, 60°, 90° の直角三角形の辺の比から $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. x 軸より下にあるので, y 座標には負号がつくことに注意.



$$\underline{\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \cdots\cdots (答)$$

同様に, 単位円上に 315° を書き込み, その点の x 座標の値を読むと 45°, 45°, 90° の直角三角形の辺の比から $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. y 軸より右にあるので, x 座標は正.

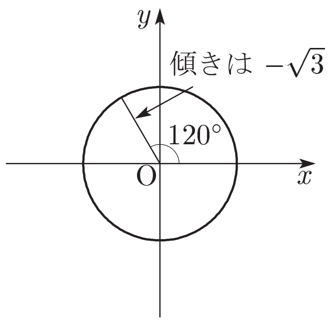


$$\underline{\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \cdots\cdots (答)$$

【例題】　$\tan 120^\circ$ を求めよ.

同じく, 単位円上に 120° を書き込み, その傾きを読むと $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形の辺の比から $-\sqrt{3}$. ちなみに $\tan 90^\circ$ と $\tan 270^\circ$ については傾きがなくなってしまうので, 考えない.

$$\tan 120^\circ = \underline{-\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots (答)$$



作図によっても求められない角度（例：$15^\circ, 22.5^\circ, \cdots$）のときは倍角の公式（詳しくは「種類と角の統一」で）や加法定理を用いる. 加法定理とは

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

（ともに複号同順）のことであり, たとえば $\sin 15^\circ$ であれば.

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

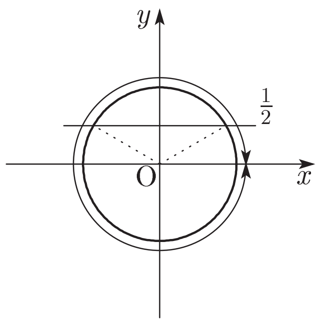
として求めればよい. この方法は $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 165^\circ$ のような $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の和や差で計算できる角度には有効だ.
この加法定理は三角関数を勉強していく上で, 絶対に暗記しなくてはならない 3 つの式のうちの 2 つ（残る 1 つは $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ — この 3 つ以外の式は暗記してはいけない — 似たような式が多くて使い間違えるからで, 殆どの式はその場で作る : 詳しくは「種類と角の統一」で）である.

次に三角方程式の解き方を決めておく. 単位円を用いるのは同じだが, そこに与えられた x の範囲を矢印で「渦巻き」のように書き込んでおくこと. そこに三角関数の値を表す線を書き入れると良い. 今引いた線と単位円の交点を渦巻きに沿って拾っていけばそれが答えだ.

【例題】　以下の方程式を括弧内の範囲で解け.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$$

sin は y 座標を表すから, 単位円上に $y = \dfrac{1}{2}$ を書き込み, 0° から 360° まで「渦巻き」を書く. $y = \dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は, $x = 30^\circ, 150^\circ$ と読めるのでそれが答え.
$x = \underline{30^\circ, 150^\circ} \quad \cdots\cdots (答)$

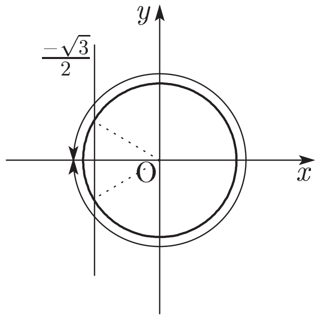


【例題】　以下の方程式を括弧内の範囲で解け．

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (-180^\circ \leqq x < 180^\circ)$$

$\cos$ は x 座標を表すから，単位円上に $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を書き込み，-180° から 180° まで「渦巻き」を書く．$x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\fallingdotseq \dfrac{-1.73}{2} = 0.865\right)$ と単位円の交点は，渦巻きに沿って $x = -150^\circ, 150^\circ$ と読めるのでそれが答え．渦巻きを忘れると $x = 150^\circ, 210^\circ$ と間違えるので注意．

$x = \underline{-150^\circ, 150^\circ}$　$\cdots\cdots$（答）



単位円の図から角度を読むので，図はある程度大きく，正確でないといけない．

不等式になってもやることは同じで，違いといえば値を表す直線を引くだけでなく，その範囲に斜線を引いておくということだ．こうするだけでずいぶんと頭の負担が減る．

【例題】　以下の不等式を括弧内の範囲で解け．

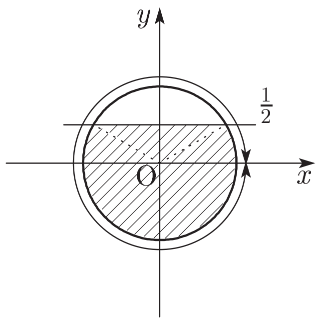
$$\sin x < \frac{1}{2} \qquad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$$

$$\cos x \geqq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0^\circ \leqq x < 360^\circ)$$

$\sin$ は y 座標を表すから，単位円上に $y = \dfrac{1}{2}$ を書き込み，それよりしたの領域を斜線でぬる．0° から 360° まで「渦巻き」沿って読む．

$y = \dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は，$x = 30^\circ, 150^\circ$ と読めるので

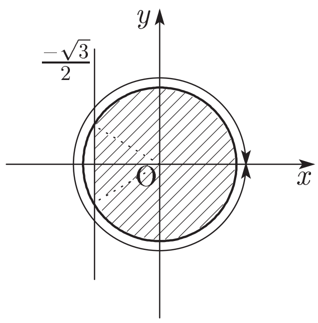
$\underline{0^\circ \leqq x < 30^\circ, 150^\circ < x < 360^\circ}$　$\cdots\cdots$（答）



$\cos$ は x 座標を表すから，単位円上に $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を書き込み，0° から 360° まで「渦巻き」を書く．

$x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点は，渦巻きに沿って $x = 150^\circ, 210^\circ$ と読めるのでそこが境目．

$\underline{0^\circ \leqq x \leqq 150^\circ, 210^\circ \leqq x < 360^\circ}$　$\cdots\cdots$（答）



1.2　$ax+b$ 型の三角方程式

角が $ax+b$ の形になっている三角関数 $(\sin, \cos, \tan)$ について, 式の処理ととりうる値の求め方を学ぶ. 条件の範囲は通常 x の不等式で与えられるので, これを $ax+b$ の範囲の不等式に直す. ここまでは全ての問題に共通である.

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \xrightarrow{\times a} a\alpha \leqq ax \leqq a\beta \quad (\text{注：} a>0 \text{ ならば})$$
$$\xrightarrow{+b} a\alpha + b \leqq ax + b \leqq a\beta + b$$

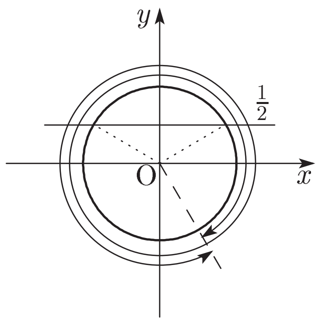
この $ax+b$ の範囲を渦巻きとして単位円の周りに書き込む. 三角関数の値の直線を引くのは前章と同じである. この直線と単位円の交点を渦巻きに沿って読んでいくわけだが, 求めた答は $ax+b$ についての答なので, x の答に直さなければいけない.

【例題】　$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき, $2\sin(2x-60^\circ) = 1$ を解け.

$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より $0^\circ \leqq 2x < 720^\circ$.

$$-60^\circ \leqq 2x - 60^\circ < 660^\circ$$

この範囲を渦巻きとして書き込む.
$\sin(2x-60^\circ) = \dfrac{1}{2}$ より, 三角関数の係数を 1 にして単位円上に $y = \dfrac{1}{2}$ の直線を書き込む. 交点を読むのだが, それは x ではなく $2x-60^\circ$ の値である.



$$2x - 60^\circ = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$$

$$2x = 90^\circ, 210^\circ, 450^\circ, 570^\circ$$

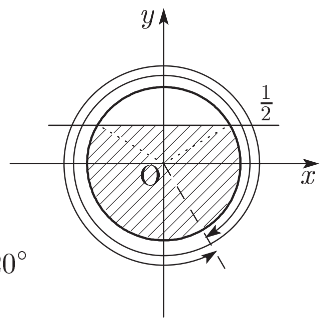
$$x = \underline{45^\circ, 105^\circ, 225^\circ, 285^\circ} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【例題】　$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき, $2\sin(2x-60^\circ) < 1$ を解け.

前問と同様に $-60^\circ \leqq 2x - 60^\circ < 660^\circ$.

$$\sin(2x-60^\circ) < \frac{1}{2}$$

より, $-60^\circ \leqq 2x-60^\circ < 30^\circ$, $150^\circ < 2x-60^\circ < 390^\circ$, $510^\circ < 2x-60^\circ < 660^\circ$ これより,



$$0^\circ \leqq 2x < 90^\circ,\ 210^\circ < 2x < 450^\circ,\ 570^\circ < 2x < 720^\circ$$

$$\therefore \underline{0^\circ \leqq x < 45^\circ,\ 105^\circ < x < 225^\circ,\ 285^\circ < x < 360^\circ} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

次の問題は $ax+b$ の範囲を求めるまでは, 方程式・不等式と同じであるが, 単位円上の範囲をとらえたら, 直ちに三角関数のとりうる値を求める. なお $p\sin(ax+b)+q$ の形のとりうる値は,

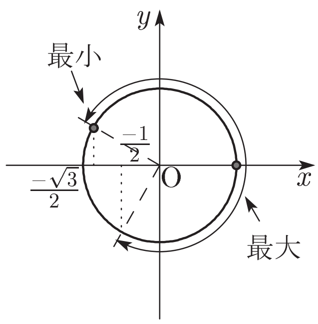
$$\sin(ax+b) \text{ の範囲} \to p\sin(ax+b) \text{ の範囲} \to p\sin(ax+b)+q \text{ の範囲}$$

の順に考えていけばよい.

【例題】　$-30^\circ \leqq x \leqq 60^\circ$ のとき, $y = 2\cos(3x-30^\circ)$ の最大値, 最小値およびそのときの x の値を求めよ.

$-30^\circ \leqq x \leqq 60^\circ$ より $-90^\circ \leqq 3x \leqq 180^\circ$.

$$-120^\circ \leqq 3x-30^\circ \leqq 150^\circ$$



cos は x 座標を表すので, 右にあるほど大きく, 左にあるほど小さい. 図から, 一番大きいのは角度が 0° のときで, 一番小さいのは角度が 150° のときと読み取れるから,

$$\cos 150^\circ \leqq \cos(3x-30^\circ) \leqq \cos 0^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos(3x-30^\circ) \leqq 1$$

$$\therefore\ -\sqrt{3} \leqq 2\cos(3x-30^\circ) \leqq 2$$

最大値は　$3x-30^\circ = 0^\circ$　より　$x = 10^\circ$　のとき
最小値は　$3x-30^\circ = 150^\circ$　より　$x = 60^\circ$　のとき

$\therefore$ 最大値 : 2 $(x = 10^\circ)$,　最小値 : $-\sqrt{3}$ $(x = 60^\circ)$　$\cdots\cdots$(答)

x の不等式を $ax+b$ の範囲に直して値を求め, 読み取った $ax+b$ の値を x まで戻すのは, はっきりいって面倒だが, 仕方が無い. 答えを全て漏れなく探すにはこれ以外の方法がない. このような作業をミスなく素早くこなせることが受験勉強の第 1 歩なのである.

度数法と弧度法

角度を表す方法には度数法と弧度法の 2 種類がある. 皆さんの見慣れているほうが度数法で 30° などと表記する. 学校によって進度が異なるため, この冊子は度数表示になっているが, 本来のテキストでは弧度法で記述されている. 理科系の数学や物理を学ぶ上では早めに弧度法になれておいたほうがよい. 表し方が変わるといっても, 180° を π として, その何倍かで角度を表すだけだ. (例 : $90^\circ = \pi/2, 60^\circ = \pi/3$) さらに単位円を用いた当塾の解法にも弧度法のほうが (慣れてしまえば) 数倍速い. 図を見れば, すぐに値が言える (例 : 半円の 1/4 だから, $\pi/4$ だ) のだ.

1.3 $a\sin x + b\cos x$ 型

$\sin x$ と $\cos x$ の1次式の和（あるいは差）は合成によって1つの三角関数にまとめる．合成とは, 加法定理を通常と逆に用いてまとめる作業をいう．

まず, $p^2+q^2=1$ という関係が成り立つ2つの数 p, q に対しては,

$$p = \cos\alpha,\ \ q = \sin\alpha$$

とおくことができる．$\cos\alpha, \sin\alpha$ はどっちでもかまわないし, マイナスをつけてもよい．つまり $(p,q) = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ でもよいし $(p,q) = (-\cos\alpha, \sin\alpha)$ とおいてもかまわない．
一般の $a\sin x + b\cos x$ において a, b が $a^2+b^2=1$ という関係をみたすことはまずあり得ない．そこで, 無理矢理 $\sqrt{a^2+b^2}$ でくくると

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

と変形する．ここで

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1 \quad \cdots\cdots(*)$$

となっていることを確認しよう．$\sqrt{a^2+b^2}$ の部分はよくおぼえておこう．

$(*)$ の関係が成り立つことがわかれば, 前述の通り $p=\cos\alpha, q=\sin\alpha$ とおくことができるから,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \quad \cdots\cdots(**)$$

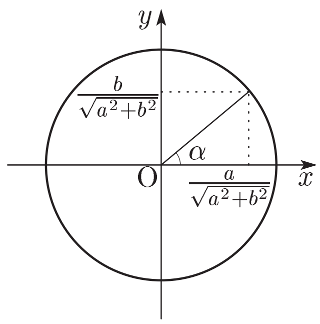
とおきかえることにより,

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) \quad \cdots\cdots\diamondsuit \end{aligned}$$

と変形していく．ここで,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (\text{加法定理})$$

を用いていることに注意しよう．
a, b は与えられる数だから, $(**)$ は sin と cos の値がわかっていることを意味する．そこで, α の値は必ずわかるハズである．
右の図のように作図すれば, α がどんな角であるかわかる．もちろん α を具体的に求めることが可能ならば必ず求めておくこと．



合成する方法は一通りとは限らない．教科書には $\diamondsuit$ の変形しか書いていないことも多いが, 以下のように様々な変形が可能である．

- $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ とおけば,

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\sin\alpha + \cos x\cos\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

($\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ を用いる.)

- $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\sin\alpha$ とおけば,

$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha) \end{aligned}$$

($\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を用いる.)

など. 同じ α の字は使っていても, それぞれの変形における α の値は異なっていることに注意しよう.
最終的な解き方は, 「$ax+b$ 型の三角関数」の解き方に従う.

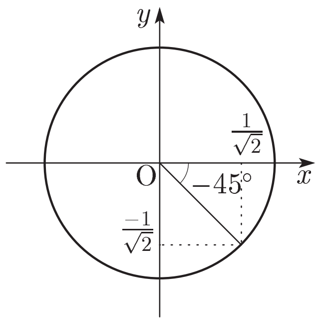
【例題】　次の方程式を解け. ただし $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする.

$$\sin x-\cos x=1$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x\right\}$$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\alpha=-45^\circ$

（注：もちろん $\alpha=315^\circ$ としてもかまわない. ）



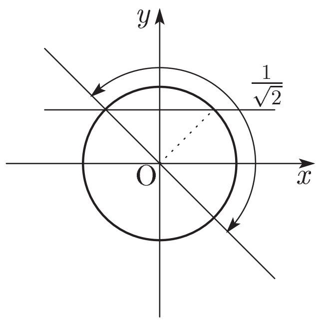
$$\begin{aligned} \therefore\quad \sin x-\cos x &= \sqrt{2}\{\sin x\cos(-45^\circ)+\cos x\sin(-45^\circ)\} \\ &= \sqrt{2}\sin\{x+(-45^\circ)\} \\ &= \sqrt{2}\sin(x-45^\circ) \end{aligned}$$

よって, $\sin(x-45^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より $-45^\circ \leqq x-45^\circ \leqq 135^\circ$.

$$x-45^\circ=45^\circ,135^\circ$$

$$\therefore\quad x=\underline{90^\circ,180^\circ}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$



α を具体的に求めることが不可能であっても, 単位円を書いてどんな角であるかを視覚的にとらえておきたい. 値を考えるときは

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

と $\cos\alpha,\sin\alpha$ の値を利用して考えていく.

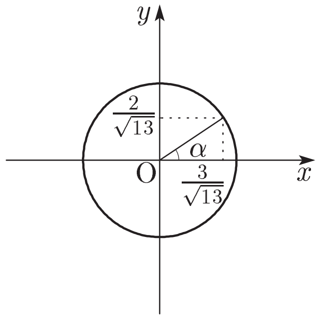
最大値と最小値は単位円上で考えれば簡単だ. 例えば合成の結果 sin にまとめられているのであれば, sin は y 座標であることから, 上にあるほど大きく, 下にあるほど小さいということになる. 同様に合成の結果 cos にまとめられているのであれば, cos は x 座標であることから, 右にあるほど大きく, 左にあるほど小さいということになる. いずれにしてもそういう点を図の中にはっ

きり書き込んでおこう.
間違っても「 x の範囲の両端を式に代入して, 大きいほうが最大値, 小さいほうが最小値」などと, 恥ずかしい処理をしないこと. そうならないことは単位円の図を見ればすぐわかるはずだ. 三角関数の変化は複雑で頭の中だけでは考えられないから, はじめからそれを見越して単位円を用いる練習をしてきたのである.

【例題】 関数 $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$ について, 次の問いに答えよ.

1. $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき, $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ.
2. $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき, $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ.
3. $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき, $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ.

角度の範囲は最後の「渦巻き」まで関係ないわけだから, 先に合成をしてしまおう.



$$3\cos x - 2\sin x = \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x\right)$$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ より, α は左図で表される角で, これより,

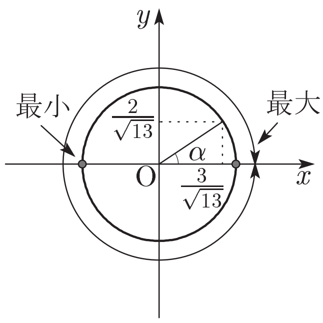
$$3\cos x - 2\sin x = \sqrt{13}\cos(x+\alpha)$$

と変形できる.

1. $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より,

$$\alpha \leqq x + \alpha < 360^\circ + \alpha$$

左図より最大になるのは角度が 0° のときで, 最小になるのは角度が 180° のときだから（角度の最大値には等号のない不等号だが, cos の最大値・最小値とは関係ないので)



$$\cos(180^\circ) \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \cos(0^\circ)$$

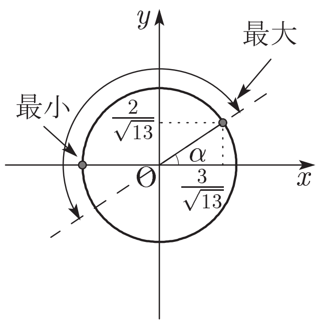
$$-1 \leqq \cos(x+\alpha) \leqq 1$$

$$-\sqrt{13} \leqq \sqrt{13}\cos(x+\alpha) \leqq \sqrt{13}$$

$\therefore$ $\underline{最大値\ \sqrt{13},\quad 最小値\ -\sqrt{13}}$ $\cdots\cdots$(答)

2. $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より,

$$\alpha \leqq x+\alpha \leqq 180^\circ+\alpha$$



左図より最大になるのは角度が α のときで, 最小になるのは角度が 180° のときだから

$$\cos 180^\circ \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \cos\alpha$$

$\cos(\alpha)$ の値は合成のときに出ているから

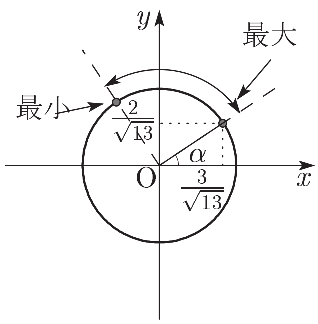
$$-1 \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$-\sqrt{13} \leqq \sqrt{13}\cos(x+\alpha) \leqq 3$$

$\therefore$ 最大値 3, 最小値 $-\sqrt{13}$ $\cdots\cdots$(答)

3. $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ より,

$$\alpha \leqq x+\alpha \leqq 90^\circ+\alpha$$



左図より最大になるのは角度が α のときで, 最小になるのは角度が $90^\circ+\alpha$ のときだから

$$\cos(90^\circ+\alpha) \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \cos\alpha$$

$\cos(90^\circ+\alpha)$ の値は加法定理を用いて

$$\cos(90^\circ+\alpha) = \cos 90^\circ\cdot\cos\alpha - \sin 90^\circ\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha$$

$$-\sin\alpha \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \cos\alpha$$

$$-\frac{2}{\sqrt{13}} \leqq \cos(x+\alpha) \leqq \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$-2 \leqq \sqrt{13}\cos(x+\alpha) \leqq 3$$

$\therefore$ 最大値 3, 最小値 -2 $\cdots\cdots$(答)

ここに来てから, 急に「渦巻き」をやろうといってもうまくいかないでしょう.
ここより前で, 少しでも手を抜いたならすぐに戻って復習すること. 上達への近道は手を動かすことと, 頻繁な復習のみ. ここができないとこの先を理解できても決して自分で解けるようにはなりません.
もちろん, この程度のこともできない人は上位大学にはどこにも合格できません.

1.4　種類と角の統一

　一般的な三角関数式の処理として, 最も頻度が高いのは「種類 $(\sin, \cos, \tan)$ と角 (x や $2x$) と統一する」という考え方である．確実なものにしておいてほしい．
種類を変える公式としては, 次のものをおさえておくとよい．

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \cdots\cdots(1)$$

(1) の両辺を $\cos^2 x$ で割ると,

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) の両辺を $\sin^2 x$ で割ると,

$$1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \cdots\cdots(3)$$

この (1), (2), (3) の式はいずれも恒等式なので, x に同じ値を代入する分にはいつでも使うことができる．$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ としてよいということである．
もちろん, (1) がメインで, (2) と (3) は $\tan x$ に対して用いる．しかし, $\tan x$ が出てきたときにはむしろ次の公式を用いて $\sin x, \cos x$ に直して考えるのが原則である．

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ここで注意しなければならないのは, (1) を用いて $\sin x$ や $\cos x$ の種類を変えるには, $\sin^{2n} x, \cos^{2n} x$ のように偶数次の $\sin, \cos$ に対してしか使えないということである．つまり $\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = (1 - \cos^2 x)^n, \cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = (1 - \sin^2 x)^n$ ということだ．

> 偶数次の $\sin, \cos$ はいつでも種類が変えられる．

必然的に奇数次の $\sin, \cos$ は種類を変えることができないから, 種類を統一する場合, 奇数次の $\sin, \cos$ に統一するしかない．
　角を統一する公式としては, 倍角の公式, 3 倍角の公式を用いる．倍角公式は,

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \quad \cdots\cdots(4) \\ \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \quad \cdots\cdots(5) \\ \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \quad \cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

の 3 通りある．それぞれ加法定理の公式で $\alpha = \beta = \theta$ としたものだ．

$$\begin{aligned} \sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) &= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$\cos 2\theta$ の変形は 3 通りあり, 必要に応じて使い分ける．

$$\begin{aligned} \cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \\ &\qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ を用いる}) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta \\
&\qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ を用いる}) \\
&= 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

ちなみに tan の倍角の公式もあるにはあるが, あまり使う機会はないだろう.

$$
\begin{aligned}
\tan 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \\
&\qquad (\text{分子・分母を } \cos^2\theta \text{ でわる. 「分数の左下を 1 にする」と覚える}) \\
&= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}
\end{aligned}
$$

倍角公式を使うときのポイントは 2 つある. $\sin 2x$ は $\sin x$ についても $\cos x$ についても 1 次式だから, 角を x に統一することはできても, 種類を統一することはできない. よって,

$\sin 2x$ の種類を統一することはできない.

$\cos 2x$ は (5),(6) という 2 つの変形方法があるので,

cos の倍角公式は, $\sin x$ に統一するか, $\cos x$ に統一するか考えてから用いる.

一方で, 3 倍角公式は滅多に使わないので, 正確に暗記していることは難しい. いつでも作れるようにしておきたい.

$$
\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x+x) \\
&= \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x \\
&= 2\sin x\cos^2 x + (1-2\sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x(1-\sin^2 x) + (1-2\sin^2 x)\sin x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
\cos 3x &= \cos(2x+x) \\
&= \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}
$$

ただし, 公式は正確に暗記していなくても

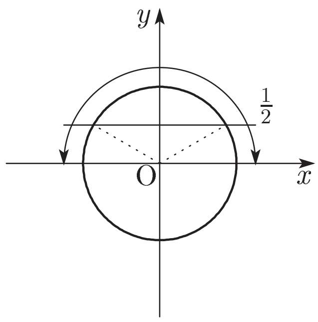
$$
\begin{aligned}
\sin 3x &\to \sin x \text{ の 3 次式} \\
\cos 3x &\to \cos x \text{ の 3 次式}
\end{aligned}
$$

となることは, 先を読むためにもおぼえておきたい.

【例題】　次の方程式を解け．ただし $0° \leqq x < 180°$ とする．

$$2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$$

$\cos 2x$ は sin にも cos にもなれるが, $\sin x$ は変化のしようがないのでこれにあわせるしかない．



$$2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より

$$2(1 - 2\sin^2 x) + 8\sin x - 5 = 0$$

$$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$$

ここで因数分解に気づかなくてはならないのだが, その理由は「$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$」で説明.

$$(2\sin x - 3)(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$ だが $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$0° \leqq x < 180°$ より, 単位円を書いて

$$x = \underline{30°, 150°} \quad \cdots\cdots(答)$$

角の統一をする場合, いつでも x に統一すれば良いというものではない．次の問題は, $\sin x$ にも $\cos x$ にも統一することができる．しかし, 解けなくはないが, $\sin x$ (または $\cos x$) の 4 次式になってしまう．こういう場合,

次数が高くなる場合, $\cos 2x$ に統一できることもある

ことに注意しておこう．使う式は倍角公式であるが, 倍角公式のうち「x を $2x$ に統一する」という目的ならば cos の倍角公式しか用いない．すなわち,

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad より \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad より \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

と変形して $\cos^2 x, \sin^2 x \rightarrow \cos 2x$ と $\cos 2x$ に統一していく．2 次が 1 次へと「次数が下がる」ことより, 式処理はだいぶラクになる．

三角不等式の解法はいろいろな手があるが, はじめのうちに $-1 \leqq \sin x \leqq 1, -1 \leqq \cos x \leqq 1$ を意識しなくても, 次のように $\sin x, \cos x$ について不等式を解いてから単位円で考えていった方がカンタンであろう．

【例題】　次の不等式を解け．ただし $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ とする．

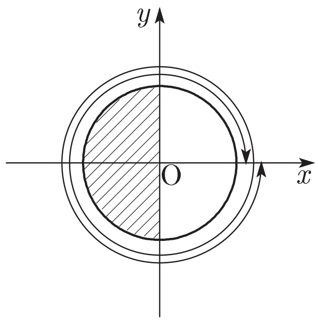
$$\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 4 > 0$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より，

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cdots\cdots (1)$$

$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ より，

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x \quad \cdots\cdots (2)$$



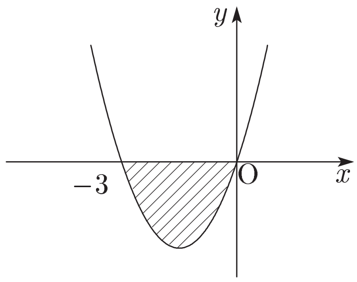
(1),(2) より与えられた不等式は，

$$1 - \cos^2 2x + 6 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - 4 > 0$$

$$\cos^2 2x + 3\cos 2x < 0$$

$$\cos 2x(\cos 2x + 3) < 0$$

次の行へすぐに計算できない人は, 2 次不等式に問題があります．$Y = X(X+3)$ のグラフを書いて（ $X = \cos 2x$ と置き換えています），そのグラフの $Y < 0$ となっているところを読めば $-3 < X < 0$ と楽に出せるはず．ここでもグラフの助けを借ります．



$$\therefore\ -3 < \cos 2x < 0$$

$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より $0^\circ \leqq 2x < 720^\circ$．

$$90^\circ < 2x < 270^\circ, 450 < 2x < 630$$

$$\therefore \underline{45^\circ < x < 135^\circ, 225^\circ < x < 315^\circ} \quad \cdots\cdots (答)$$

1.5　因数分解

見てコレとわかる三角関数式でない場合, まず考えて欲しいのは

「角と種類の統一」

であるが, これがちょっと不可能な三角関数式もある．たとえば, すぐ下にある問題は $\sin 2x$ の 1 次の項を含んでおり $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より $\sin x$ にも $\cos x$ にも統一できない.
「種類と角の統一」が難しい式は因数分解をねらう．因数分解のやり方は 2 つ知っておくとよい. 1 つは共通因数をくくり出すという最も基本的な因数分解である．この場合, 倍角や 3 倍角の公式より $\sin x$ や $\cos x$ で表しておき, 共通因数をくくり出す.

【例題】　次の方程式を解け．ただし $0° \leqq x < 180°$ とする.

$$\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin^3 x = 0$$

これらの式はもう, 自力で作れますよね.

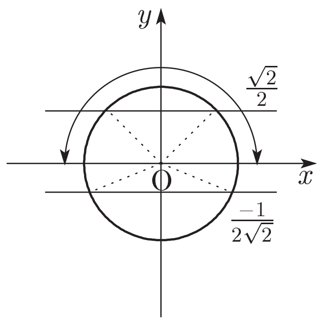
$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x\\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}&\sin 2x + \sqrt{2}\cos 3x\\ &= 2\sin x\cos x + \sqrt{2}(4\cos^3 x - 3\cos x)\\ &= \cos x(2\sin x + 4\sqrt{2}\cos^2 x - 3\sqrt{2})\\ &= \cos x\{2\sin x + 4\sqrt{2}(1-\sin^2 x) - 3\sqrt{2}\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \cos x(4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos x(2\sqrt{2}\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$



この因数分解は先に $\sqrt{2}$ でくくっておいたほうがやりやすいでしょう．$\sin x = t$ とおいてから解の公式でも出てはきますが $\cdots$.

$$\cos x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$0 \leqq x \leqq 180°$ より

$$x = \underline{45°,\ 90°,\ 135°} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

次の問題にある $\sin 7x$ のような大きな角の場合, 加法, 倍角, 3 倍角をどんどん使って $\sin x$ や $\cos x$ で表すことが不可能なワケではないが, 時間もかかるし次数も高くなり賢明な方法とは言えない.
　もう 1 つの因数分解は, 和積の公式の利用である．和積の公式は, その名のとおり, 和の形になっているものを積の形に直す公式であり, 因数分解と同じような価値がある.

例) $\underbrace{x^2-3x+2}_{\text{和}}=\underbrace{(x-1)(x-2)}_{\text{積}}$

上の例のとおり, 和積と因数分解は相通するものがある.

さて, 和積公式は滅多に使わないので常時おぼえていることは難しい. 必要なときにいつでも作れるようにしておくのがよい. 公式を作るとき, ついでに (というか, 途中経過として) 積を和に直す「積和公式」も一緒に作れるので, 2 つの公式の作り方をセットにしておさえておく.

加法定理へ辺々加える $\rightarrow$ 積和公式 $\xrightarrow{\text{おきかえ}}$ 和積公式

という流れをよくおぼえておこう. 加法定理は 4 種類あるが, 辺々加えると言っても, $\pm$ の異なる同じ種類の加法定理を辺々加える (または引く) のである. 異なる種類の加法定理をいじっても意味がない.

＜4 通りの変形＞

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(1)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(2)
\end{aligned}
$$

(1) + (2) より $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots(\mathrm{A})$

(1) − (2) より $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(\mathrm{B})$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(3)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(4)
\end{aligned}
$$

(3) + (4) より $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots(\mathrm{C})$

(4) − (3) より $-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots(\mathrm{D})$

(A)~(D) のそれぞれ左辺と右辺を入れ換えて両辺を 2 で割れば積和公式が得られる.

(一例) (A) より $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

続いて, $\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ とおくと,

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \alpha & + & \beta & = & A\\
+) & \alpha & - & \beta & = & B\\ \hline
 & 2\alpha & & & = & A+B
\end{array}
\qquad \therefore\ \alpha=\frac{A+B}{2}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \alpha & + & \beta & = & A\\
-) & \alpha & - & \beta & = & B\\ \hline
 & & & 2\beta & = & A-B
\end{array}
\qquad \therefore\ \beta=\frac{A-B}{2}
$$

となるので, (A)~(D) はそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
\sin A+\sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
\sin A-\sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
\cos A+\cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
-\cos A+\cos B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}
\end{aligned}
$$

となって, 和積公式が完成する.

試験場ではまさか 4 通りも変形しているワケにもいかないから, 使いたい公式をある程度予想して作っていくことになる. たとえば, 下の例題の場合,

$\sin 7x + \sin x \to \sin$ の和だから, $\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$ を辺々加える

という感じで公式を作っていく. 同じ種類の加法定理を辺々加えたり, 引いたりするので出来上がった公式を見てもわかると思うが,

同種の 1 次式 (和または差) $\to$ 和積公式

ということになる. たとえば, $\sin 3x + \cos 7x$ のように異種の 1 次式に対しては和積公式は使えない.

【例題】 次の不等式を解け. ただし $0^\circ \leqq x < 90^\circ$ とする.

$\sin 7x + \sin x < 0$

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ より, $\sin 7x + \sin x = 2\sin 4x\cos 3x < 0.$
$0^\circ \leqq 4x < 360^\circ$, $0^\circ \leqq 3x < 270^\circ$ に注意して,

1. $\sin 4x > 0$, $\cos 3x < 0$ のとき
   - $0^\circ < 4x < 180^\circ$ より $0^\circ < x < 45^\circ$.
   - $90^\circ < 3x < 270^\circ$ より $30^\circ < x < 90^\circ$.

   $\therefore\ 30^\circ < x < 45^\circ$

2. $\sin 4x < 0$, $\cos 3x > 0$ のとき
   - $180^\circ < 4x < 360^\circ$ より $45^\circ < x < 90^\circ$.
   - $0^\circ < 3x < 90^\circ$ より $0^\circ < x < 30^\circ$.

   $\therefore$ 解なし

以上より,

$\underline{30^\circ < x < 45^\circ}$ $\cdots\cdots$ (答)

1.6 $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ 型

この辺でそろそろ三角関数式の処理の方法をまとめていくことにしよう．三角関数式の処理は, 公式がたくさんあるので, いろいろなタイプ（の処理法）があるようだが, 次に述べる 5 つに大別できる.

（タイプ 1） $a\sin x + b\cos x$ 型
（タイプ 2） $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ 型
（タイプ 3） $\sin x$ と $\cos x$ の対称式
（タイプ 4） 種類と角の統一
（タイプ 5） 因数分解

ここで, （タイプ 1）~ （タイプ 3）は式の形から直ちに判断することができる.

「見た目でスグわかる三角関数式」

として覚えておいて欲しい．例をあげておくと,

（タイプ 1） $\sin x$ と $\cos x$ の 1 次式は全てこのタイプである.

$$\sin x + 2\cos x,\ 2\cos x - 3\sin x, \cdots\cdots$$

などがこのタイプの例である．なお,

$$\cos x + \cos 3x,\ \sin 2x - \sin 3x, \cdots\cdots$$

のような同じ種類の 1 次式はこのタイプではなく, (タイプ 4）か (タイプ 5) の処理に従うことになるので注意しておいてほしい.

（タイプ 2） $\sin^2 x,\ \sin x\cos x,\ \cos^2 x$ および定数項で構成される式がこのタイプに当てはまる．例は,

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x,\ \sin^2 x - 2\sin x\cos x, \cdots\cdots$$

などである．特に, 1 つ項が少ない

- $a\sin^2 x + b\sin x\cos x$
- $b\sin x\cos x + c\cos^2 x$

は因数分解（共通因数でくくる）も可能に思えるが, このタイプと判断して処理しないと解けないことが多いので注意しておいてほしい．なお, このタイプの式を「$\sin x$ と $\cos x$ の同次 2 次式」とも言う.

（タイプ 3） ある式の中の sin と cos を入れ替えても, 式が元に戻るものを対称式といい, 特別の性質がある.

$$3\sin^2 x + \sin x\cos x + 3\cos^2 x,\ (\sin x - 2)(\cos x - 2), \cdots\cdots$$

などがこのタイプの例であるが, 次の例のように $\sin 2x$ で表されたときに見落とさないようにしたい.

$$2\sin x + 2\cos x - 3\sin 2x$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より $\sin 2x$ は対称式なのである. 対称式への対処法は「三角関数の対称式」で扱う.

ある三角関数式が与えられたとき, 「見た目でスグわかる三角関数式かどうか」をまず考えてほしい. 上の 3 つのどのタイプにも当てはまらない場合に, 「種類と角の統一ができないか（タイプ 4)」と考え, それがダメなら「因数分解する（タイプ 5)」ことを考えていけば, まず間違いないだろう.

$$\boxed{\text{見た目でスグわかる}} \xrightarrow{\text{ダメ}} \boxed{\text{種類と角の統一}} \xrightarrow{\text{ダメ}} \boxed{\text{因数分解}}$$

という順序で考えていくということである. さて, ここでは,

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x \quad \text{（同次 2 次式)}$$

の処理方法を学ぶ. 処理の仕方はちょっと面倒であるが, キチンと手続きをふめば必ずできる.

（手順 1） まず, 倍角公式を用いて $\sin 2x$ と $\cos 2x$ の 1 次式である

$$p\sin 2x + q\cos 2x + r$$

の形へ変形する.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin 2x &=& 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &=& 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 2x &=& 1 - 2\sin^2 x \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcl} \sin x\cos x &=& \frac{1}{2}\sin 2x \\ \cos^2 x &=& \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &=& \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{array}\right.$$

に従って x の式を $2x$ の式へ統一していく要領になる. 倍角公式は通常「$2x$ を x で表す」ために用いることが多いが, 「種類と角の統一」のところでも述べたような「x を $2x$ で表す」ために用いることもある.

（手順 2） 式が $p\sin 2x + q\cos 2x + r$ の形に変形されれば, この式は「$\sin 2x$ と $\cos 2x$ の 1 次式」だから合成することによって 1 つにまとめることができる. すなわち,

$$p\sin 2x + q\cos 2x = \sqrt{p^2+q^2}\sin(2x+\alpha)$$

のようにまとめればよい.

【例題】　次の方程式を解け．ただし $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする．

$$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 3$$

$$\begin{aligned}
\sin x\cos x &= \frac{1}{2}\sin 2x \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)
\end{aligned}$$

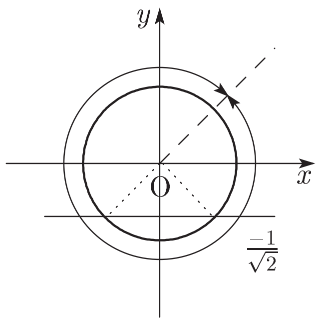
より，

$$3\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = 3$$

$$-\sin 2x - \cos 2x = 1 \quad \therefore\ \sin 2x + \cos 2x = -1$$

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \cos 2x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right) \\
&\quad \left(\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ と考えると}\right) \\
&= \sqrt{2}\,(\sin 2x\cos 45^\circ + \cos 2x\sin 45^\circ) \\
&= \sqrt{2}\sin(2x+45^\circ) \quad \left(= \sqrt{2}\cos(2x-45^\circ) \text{ でも OK}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \sqrt{2}\sin(2x+45^\circ) &= -1 \\
\sin(2x+45^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より $45^\circ \leqq 2x+45^\circ \leqq 405^\circ$．

$$2x + 45^\circ = 225^\circ,\ 315^\circ$$

$\therefore$ $\underline{x = 90^\circ,\ 135^\circ}$ ……（答）

【例題】　次の不等式を解け．ただし $0° \leqq x \leqq 180°$ とする．

$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x \geqq 3$

$-\cos 2x - \sin 2x \geqq 1$

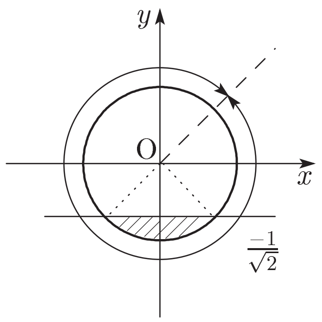
$\sin 2x + \cos 2x \leqq -1$

$\sin(2x + 45°) \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$225° \leqq 2x + 45° \leqq 315°$

$180° \leqq 2x \leqq 270°$

$\therefore \underline{90° \leqq x \leqq 135°}$　$\cdots\cdots$ (答)



【例題】　$0° \leqq x \leqq 90°$ のとき，$f(x) = \sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ．

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + 3\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + 4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ &= \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x+45°)$ より，

$$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\sin(2x+45°) + \frac{5}{2}$$

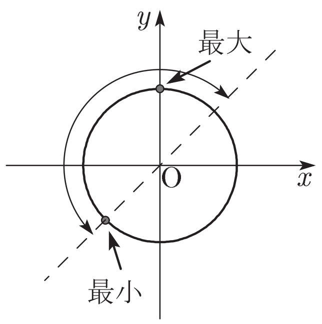
$0° \leqq x \leqq 90°$ より $45° \leqq 2x + 45° \leqq 225°$.

$\sin 225° \leqq \sin(2x+45°) \leqq \sin 90°$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin(2x+45°) \leqq 1$

$-\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2x+45°) \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$1 \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2x+45°) + \dfrac{5}{2} \leqq \dfrac{3\sqrt{2}+5}{2}$



$\underline{最大 : \dfrac{3\sqrt{2}+5}{2},\quad 最小 : 1}$　$\cdots\cdots$ (答)

1.7　三角関数の対称式

まず, 対称式という概念が存在し, α と β を交換しても変わらない式は全て $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で書き表すことができる．この $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を基本対称式という．書き表すというのは必ずしも因数分解を表すのではない．（例：$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$ ）対称式の厄介なところは,「対称式は対称式特有の攻略法でないと解けない」ということである．対称式は一見, 普通の式のような顔をしているが, いつもの式変形をしても同道巡りに陥る危険性があるのだ．ちなみに一般の式では $\alpha+\beta=s$ と $\alpha\beta=t$ などと置き換えることが定石となる．ここではそれを三角関数に用いる．

「見た目でスグわかる三角関数式」の 1 つである「$\sin x$ と $\cos x$ の対称式」は頻度も高い上に, 同次 2 次式同様, 独特の処理をするのでよく覚えておいてほしい．

全ての $\sin x$ と $\cos x$ の対称式は, 2 つの基本対称式

$$\sin x+\cos x,\ \sin x\cos x$$

で表すことができる．これによって, まず対称式を $\sin x+\cos x,\ \sin x\cos x$ だけで表しておく．

これに加えて「$\sin x$ と $\cos x$ の対称式」の場合,

$\sin x\cos x$ を $\sin x+\cos x$ で表すことができる

のである．$\sin x,\ \cos x$ の最も有名な公式である

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

は実は立派な対称式で, しかも必ず成り立つ．そこで,

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\cos^2 x &= (\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x\\ &= 1\end{aligned}$$

と変形すれば,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\left\{(\sin x+\cos x)^2-1\right\}$$

という関係が常に成り立つことになる．これによって,

$t=\sin x+\cos x$ とおくと, $\sin x$ と $\cos x$ の対称式は, t の式で表すことができる

ことになり, これが「$\sin x$ と $\cos x$ の対称式の処理」の仕方である．

さらに, α と β を交換すると元の式にマイナスをつけたものになる式のことを交代式といい, 具体的には

$$\sin x-\cos x,\ \sin^2 x-\cos^2 x,\ \sin^3 x-\cos^3 x$$

などもこのルールを使うことができる（上の 2 番目は種類と角の統一でもできる）．これらの式は,

$$\begin{aligned}(\sin x-\cos x)^2 &= \sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\\ &= 1-2\sin x\cos x\end{aligned}$$

より,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\left\{1-(\sin x-\cos x)^2\right\}$$

と変形すれば, 今度は $t=\sin x-\cos x$ で表すことができる．

このことを含めて, 具体的に以下のような式の処理ができれば十分であろう．

- $$\begin{aligned}\sin^3 x+\cos^3 x &= (\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)\\ &= (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)\end{aligned}$$
  ここで, $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\left\{(\sin x+\cos x)^2-1\right\}$ を当てはめる.

- $$\begin{aligned}\sin^3 x-\cos^3 x &= (\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)\\ &= (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)\end{aligned}$$
  ここで, $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\left\{1-(\sin x-\cos x)^2\right\}$ を当てはめる.

$\sin x$ と $\cos x$ の対称式は $t=\sin x+\cos x$ とおけば t の式で表すことができるが, 置き換えたときは,

$t=\sin x+\cos x$ とおく $\rightarrow$ t のとりうる値を調べる

という作業を忘れてはならない. これは文字消去の大原則だ. x を t に置き換えようとしているのだから, x の持っていた全ての情報を t に引き継ぐ必要がある.

まず, $\sin x+\cos x$ は $\sin x$ と $\cos x$ の 1 次式だから合成して,

$$\begin{aligned}t &= \sin x+\cos x\\ &= \sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\end{aligned}$$

と変形して, t のとりうる値を調べれば, 例題の場合, t に置き換えることによって最終的に

「$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+2t^2+\dfrac{3}{2}t-2$ の最大値・最小値」

を求めることになり, 3 次関数のグラフを書く問題に帰着される.
なお, 3 次関数のグラフを書くには「整関数の微分積分（数 II）」の知識が必要であり, この分野の苦手な者は先に学習してからここに戻ってみるとよいだろう.

【例題】　$y=\sin^3 x+\cos^3 x+4\sin x\cos x$ について, 次の問いに答えよ.

1. $\sin x+\cos x=t$ とおき, y を t の関数で表せ.
2. y の最大値および最小値を求めよ.

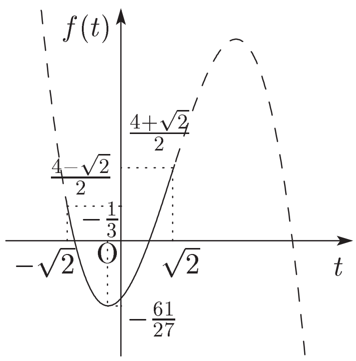
1. $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$
ここで $t=\sin x+\cos x$ とおくと,

$$\begin{aligned}\sin x\cos x &= \frac{1}{2}\left\{(\sin x+\cos x)^2-1\right\}\\ &= \frac{1}{2}(t^2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= (\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)+4\sin x\cos x\\ &= (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)+4\sin x\cos x\\ &= t\left\{1-\frac{1}{2}(t^2-1)\right\}+4\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)\\ &= \underline{-\frac{1}{2}t^3+2t^2+\frac{3}{2}t-2} \quad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

2. $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$ より
x は実数だから, $-1\leqq\sin(x+45^\circ)\leqq 1$.

$\therefore\ -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　　(単位円等は省略)



この範囲で,

$$\begin{aligned}f(t) &= -\frac{1}{2}t^3+2t^2+\frac{3}{2}t-2\\ f'(t) &= -\frac{3}{2}t^2+4t+\frac{3}{2}\\ &= -\frac{1}{2}(3t+1)(t-3)\end{aligned}$$

増減は下表の通りである.

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{61}{27}$	$\nearrow$	$\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\underline{最大:\frac{4+\sqrt{2}}{2},\quad 最小:-\frac{61}{27}}$　$\cdots\cdots$(答)

1.8 練習問題

この冊子の中で登場したテクニックを用いれば解ける問題をランダムに並べてみました．どれくらい正解できるでしょうか？チャレンジしてみてください．

（　）内の範囲で以下の方程式・不等式を解け．あるいは y の最大値・最小値を求めよ．

1. $\sin 2x - \sin x - 2\cos x + 1 \geqq 0 \quad (0° \leqq x < 360°)$
2. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = \dfrac{5}{2} \quad (0° \leqq x \leqq 180°)$
3. $\cos 2x + 3\sqrt{3}\sin x < 4 \quad (0° \leqq x \leqq 360°)$
4. $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x > 0 \quad (0° \leqq x \leqq 360°)$
5. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \quad (0° \leqq x < 360°)$
6. $y = (\sin x - 1)(\cos x - 1) \quad (0° \leqq x < 360°)$
7. $8\sin^4 x + 2\cos^2 x \geqq 3 \quad (0° \leqq x \leqq 360°)$
8. $y = \dfrac{3}{2}\sin 2x - 4\sin x - 4\cos x \quad (0° \leqq x \leqq 90°)$
9. $\sin 2x - \sqrt{2}\sin 3x = 0 \quad (0° \leqq x < 90°)$
10. $\cos 3x + \cos 2x = 0 \quad (0° \leqq x < 360°)$
11. $y = \sin(30° - 2x) + \cos 2x \quad (0° \leqq x \leqq 45°)$
12. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \quad (0° \leqq x < 360°)$

正解とヒントは次のページにあります．

前ページの問題の正解です．（　）は用いるテクニックを示しています．

1. $60^\circ \leqq x \leqq 300^\circ$ （因数分解）
2. $x = 67.5^\circ, 157.5^\circ$ （$a\sin^2 + b\sin x\cos x + c\cos^2$ 型）
3. $0^\circ \leqq x < 60^\circ, 120^\circ < x \leqq 360^\circ$ （種類と角の統一）
4. $22.5^\circ < x < 112.5^\circ, 202.5^\circ < x < 292.5^\circ$ （$a\sin^2 + b\sin x\cos x + c\cos^2$ 型）
5. $x = 0^\circ, 120^\circ$ （$a\sin x + b\cos x$ 型）
6. 最大値 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$, 最小値 0 （三角関数の対称式）
7. $45^\circ \leqq x \leqq 135^\circ, 225^\circ \leqq x \leqq 315^\circ$ （種類と角の統一）
8. 最大値 -4, 最小値 $-\dfrac{25}{6}$ （三角関数の対称式）
9. $x = 0^\circ, 45^\circ$ （因数分解）
10. $x = 36^\circ, 108^\circ, 180^\circ, 252^\circ, 324^\circ$ （因数分解：和積公式–倍角と 3 倍角で展開すると答えが全て出てこない）
11. 最大値 $\dfrac{3}{2}$, 最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ （$a\sin x + b\cos x$ 型）
12. $x = 30^\circ$ （$a\sin x + b\cos x$ 型）

スラスラ解けてはいないかもしれませんが, それは練習不足によるものです．その証拠に, 該当するところの説明を読めば, 例題の真似をしながら正解まで辿り着けるはずです．理解できていないところがあるなら, もう一度説明を読むなり, 電話等で遠慮なく質問をしてください．
そもそも, 一度説明を聞いたくらいでできるようになっているのなら, いままでの定期テスト一夜漬けの蓄積（失礼！）がある程度頭に残っているはずでしょう．中学・高校と上がるにつれ, 授業中の演習時間は急激に減っていますから, 現在数学が苦手になってしまっている人の多くの原因は練習不足によるものです．よほどの天才でもない限り, 練習と復習は欠かせません．
学校の定期テストであれば, 日頃の授業を良く聞いて, あとは多少の要領をつかめば何とかなるかもしれませんが, 入試はそうはいきません．入試での実力を決定するのは練習と復習のみです．理科系科目に限らず, 一夜漬け的勉強から早く決別しないと間に合わなくなってしまいます．
数学に限らず, 全ての科目で問題練習は必要です．そこで問題集をやろうとしても, 学校や予備校・塾の先生達の解法と問題集の正解例はまちまちですから, 2 倍勉強するような事態になり, よほど意志の強い人以外はやる気がなくなってきます．つまり, 解き方の説明と練習問題の正解例は一致していなければ練習の意味が薄いわけです．
そういうわけで, 当教室の本来のテキストにはそれぞれのテクニックを身に付けるのに必要十分な量の練習問題が, それぞれのテクニックごとに数問ずつ付いています．基礎コースの授業では授業中に, 入試対策コースの授業では授業前の予習として, この練習問題を全て自力で解いてもらいます．繰り返しますが, 身につける過程だけは我々講師陣が手伝ってあげることはできないのです．練習問題を全ての生徒が完了するように, 当教室は勉強のペース管理も行っています．

入試問題は, このようなテクニックを連続して駆使することにより, 簡単な作業のかたまりになります．ただし, これらのテクニックを正確に運用できるようになったとしても, テクニックを使う状況を明らかにしておかなくては, 肝心なところで思い出せなくなってしまいます．また, 入試

会場でド忘れしてしまう恐れもありますから, よほど暗記力に自信がある人を除けば, 問題ごとに解法を暗記するような勉強では危険です.
今回紹介した三角関数のテクニックは入試で必要なものの 9 割以上を網羅（本来のテキストにはすべて掲載してあります）しています. 分野ごとの知識をなるべく簡潔に, しかも殆ど暗記を必要としないように（今回は式を 3 つだけでしたね—他の分野も似たようなものです）まとめてあるため, 入試会場でド忘れをするようなこともありません.

毎年, 一流大学へ進学したみなさんの先輩達は, 当教室のテキストのみで十分だったと証言していますが, テキスト内の説明と練習問題は入試本番まで見据えて作られているからです. 入試問題を練習する時期になっても, 当教室の生徒はテキストの復習を中心にすればよいのです.
予備校・塾・問題集の中には「その問題だけはカッコよく解ける方法」を披露していることも少なくありません. その一方で, 学校や教科書では「どんな問題でも解けるが面倒すぎる方法」が中心です. 当教室では, 入試の時間内で「高校生が自力で得点できる解法」を指導しています. 「自力で得点できる」とは、はじめに理解するところも, 実際に運用してみるところも, その練習も, 後から復習するところも, 他の似たような問題を解くときに思い出すところも, 全て自力でできるということです. これだけの条件が整うときのみ, 年に 1 度しかない, 見たことのないような問題も出題される, 大学入試でも安定した得点を期待できるのです.